ПРАКТИЧНИЙ ДОВІДНИК

Рекомендовано до використання згідно з навчальною програмою, затвердженою **Міністерством освіти і науки України**

Математика

ЗА ВСІЄЮ ШКІЛЬНОЮ ПРОГРАМОЮ

ТЕОРІЯ:

- цікава інформація
- рекомендації щодо проходження ЗНО
- алфавітний покажчик

ПРАКТИКА:

- демонстраційний тест із коментарем та бланком відповідей

ПІДГОТУЙСЯ ДО УРОКУ, ІСПИТУ, ЗНО!

ПРАКТИЧНИЙ ДОВІДНИК

О. М. Роганін, О. І. Каплун

Математика

ЗА ВСІЄЮ ШКІЛЬНОЮ ПРОГРАМОЮ

Весна
ФОП Співак Т. К.
Харків
2009

ББК 22.1
Р59

Рецензент
В. І. Орел, учитель математики Пісочинського колегіуму
Харківської районної ради Харківської області,
учитель вищої категорії, «старший учитель»

Роганін О. М., Каплун О. І.

Р59 Математика: Практичний довідник. — Харків: ФОП Співак Т. К., 2009. — 416 с.
ISBN 978-966-8896-77-4.

Посібник укладено за чинною програмою з математики для загальноосвітніх навчальних закладів, затвердженою Міністерством освіти і науки України, та програмовими вимогами зовнішнього незалежного оцінювання з математики, розробленими Українським центром оцінювання якості освіти.

У практичному довіднику наведено основні теоретичні відомості з певної теми; приклади розв'язування типових завдань, аналогічних до вправ, які пропонуються на державній підсумковій атестації з математики, та вправ, що пропонувалися під час проведення зовнішнього оцінювання з математики в попередні роки. Також подано завдання для самоконтролю, розміщені в порядку зростання складності.

Видання розраховане на старшокласників та випускників загальноосвітніх навчальних закладів, учнів шкіл, ліцеїв, гімназій, колегіумів.

ББК 22.1

ISBN 978-966-8896-77-4

ПЕРЕДМОВА

Пропонований посібник призначений у першу чергу для випускників загальноосвітніх навчальних закладів, які готуються до вступу до вищих навчальних закладів та будуть брати участь у зовнішньому незалежному оцінюванні. Крім того, посібник допоможе учням шкіл, ліцеїв, гімназій, колегіумів швидко й ефективно повторити вивчений матеріал; в оптимальні терміни підготуватися до тематичних контрольних робіт, державної підсумкової атестації, співбесіди на підготовчих курсах при вищих навчальних закладах; знайти і використати відповідний матеріал при розв'язуванні задач.

Посібник укладено за чинною програмою з математики для загальноосвітніх навчальних закладів, затвердженою Міністерством освіти і науки України, та програмовими вимогами зовнішнього незалежного оцінювання з математики, розробленими Українським центром оцінювання якості освіти.

Посібник містить 8 розділів. Вони поділені на параграфи, у кожному з яких виділено рубрики:

— «Це треба знати!»;

— «Самовчитель»;

— «Перевір себе».

У рубриці «Це треба знати!» наведено основні теоретичні відомості з певної теми, подані у формі конспекту, схем, таблиць, графіків тощо. Матеріал рубрики дозволить найбільш повно осмислити і систематизувати теоретичний матеріал.

У рубриці «Самовчитель» наведено приклади розв'язування типових завдань, аналогічних вправам, які пропонуються на державній підсумковій атестації з математики за курс повної школи, та вправ, що пропонувалися під час проведення зовнішнього оцінювання з математики в попередні роки. В одних випадках це завдання, що ілюструють деякий алгоритм; в інших — завдання, на прикладі яких показано різні способи розв'язання однієї проблеми.

У рубриці «Перевір себе» подано завдання, призначені для перевірки навчальних досягнень. Задачі розміщені в порядку зростання складності.

Правильність виконання завдань можна перевірити за правильними відповідями, наведеними в кінці посібника.

Автори впевнені, що, опрацювавши цей посібник, ви зможете систематизувати й узагальнити свої знання, уміння й навички з математики, необхідні для успішного складання державної підсумкової атестації з математики та зовнішнього незалежного оцінювання, вступу до вищих навчальних закладів I–IV рівнів акредитації.

Бажаємо вам успіху!

ТЕОРІЯ ПЛЮС ПРАКТИКА

РОЗДІЛ 1. ТОТОЖНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ

§ 1. Властивості степенів та арифметичних коренів

Це треба знати!

1. Степінь з натуральними показниками

Нехай a — дійсне число, n — натуральне число $(n>1)$, тоді $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ множників}}$.

Якщо $n=1$, тоді $a^1 = a$. Число a — *основа степеня*, n — *показник степеня*.

Наприклад, $2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$; $(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$; $\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{16}{81}$; $(-2)^6 = -2 \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = 64$.

Властивості степеня з натуральним показником:

1) $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$;
2) $a^n : a^m = a^{n-m}$, якщо $n > m$;
3) $(a^n)^m = a^{nm}$;
4) $a^n \cdot b^n = (ab)^n$;
5) $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$, $b \neq 0$.

2. Степінь з нульовим показником. Степінь з від'ємним цілим показником

Якщо $a \neq 0$, то $a^0 = 1$. Наприклад: $(2{,}9)^0 = 1$; $(-8)^0 = 1$. Вираз 0^0 — не має смислу.

Якщо $a \neq 0$, n — натуральне число, тоді $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

Наприклад: $-2^{-3} = -\frac{1}{2^3} = -\frac{1}{8}$; $(-3)^{-2} = \frac{1}{(-3)^2} = \frac{1}{9}$.

Справедлива рівність $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$.

3. Арифметичний корінь

Арифметичним коренем n-го степеня з невід'ємного числа a (позначається $\sqrt[n]{a}$) називається невід'ємне число, n-ий степінь якого дорівнює a. Якщо $n = 2$, то пишуть $\sqrt{a}$ і такий вираз називають арифметичним квадратним коренем.

Якщо $a < 0$, n — натуральне парне число, то в області дійсних чисел $\sqrt[n]{a}$ не існує.

Якщо $a < 0$, n — натуральне непарне число $(n > 1)$, то $\sqrt[n]{a}$ існує.

Наприклад: $\sqrt[3]{-8} = -2$, оскільки $(-2)^3 = -8$; $\sqrt[3]{-27} = -3$, оскільки $(-3)^3 = -27$.

Властивості арифметичних коренів:

1) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$;

2) $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ $(a \ge 0,\ b \ge 0)$;

3) $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ $(a \ge 0,\ b > 0)\ (b \ne 0)$;

4) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}$ $(a \ge 0)$;

5) $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$ $(a \ge 0)$;

6) $\sqrt[nm]{a^{km}} = \sqrt[n]{a^k}$ $(a \ge 0)$;

7) $\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a, \text{ якщо } n - \text{непарне число;} \\ |a|, \text{ якщо } n - \text{парне число.} \end{cases}$

4. Степінь з дробовим показником

Якщо $a \ge 0$; m, n — натуральні числа $(n \ge 2)$, то $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Якщо $a > 0$, то $a^{-\frac{m}{n}} = \dfrac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$.

Неціла степінь від'ємного числа не має смислу.

Властивості степенів з раціональними показниками.

Якщо $a > 0$, $b > 0$ і r, s — будь-які раціональні числа, то:

1) $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$;

2) $a^r : a^s = a^{r-s}$;

3) $(a^r)^s = a^{rs}$;

4) $a^r \cdot b^r = (ab)^r$.

5) $\dfrac{a^r}{b^r} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^r$.

Самовчитель

Приклад 1. Знайти значення виразу:

а) $81^{\frac{3}{4}}$; б) $4^{-\frac{1}{2}}$; в) $(-8)^{\frac{1}{3}}$;

г) $\dfrac{\sqrt[4]{8\sqrt[3]{4}}}{\sqrt[6]{4\cdot 2^3\cdot\sqrt{2}}}$; д) $\sqrt[14]{64}\cdot\sqrt[7]{-16}$.

Розв'язання.

а) $81^{\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{81^3}=\left(\sqrt[4]{81}\right)^3=3^3=27.$

Відповідь. 27.

б) $4^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{4^{\frac{1}{2}}}=\dfrac{1}{\sqrt{4}}=\dfrac{1}{2}.$

Відповідь. $\dfrac{1}{2}$.

в) Вираз $(-8)^{\frac{1}{3}}$ не має смислу.

г) $$\frac{\sqrt[4]{8\sqrt[3]{4}}}{\sqrt[6]{4\cdot 2^3\cdot\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt[4]{\sqrt[3]{8^3}\cdot\sqrt[3]{4}}}{\sqrt[6]{2^2\cdot 2^3\cdot\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt[4]{\sqrt[3]{8^3\cdot 4}}}{\sqrt[6]{2^5\cdot\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt[12]{8^3\cdot 4}}{\sqrt[6]{\sqrt{2^{10}}\cdot\sqrt{2}}}=$$

$$=\frac{\sqrt[12]{\left(2^3\right)^3\cdot 2^2}}{\sqrt[6]{\sqrt{2^{10}\cdot 2}}}=\frac{\sqrt[12]{2^9\cdot 2^2}}{\sqrt[12]{2^{11}}}=\frac{\sqrt[12]{2^{11}}}{\sqrt[12]{2^{11}}}=\sqrt[12]{\frac{2^{11}}{2^{11}}}=\sqrt[12]{1}=1.$$

Відповідь. 1.

д) $\sqrt[14]{64}\cdot\sqrt[7]{-16}=\sqrt[7\cdot 2]{8^2}\cdot\sqrt[7]{-16}=\sqrt[7]{8}\cdot\sqrt[7]{-16}=-\sqrt[7]{8\cdot 16}=$

$=-\sqrt[7]{2^3\cdot 2^4}=-\sqrt[7]{2^7}=-2.$

Відповідь. −2.

Приклад 2. Винести множник за знак радикала (кореня):

а) $\sqrt[3]{m^8\cdot n^2}$; б) $\sqrt[4]{16a^3b^{11}}$.

Розв'язання.

а) $\sqrt[3]{m^8\cdot n^2}=\sqrt[3]{m^6\cdot m^2\cdot n^2}=\sqrt[3]{\left(m^2\right)^3\cdot m^2\cdot n^2}=$

$=\sqrt[3]{\left(m^2\right)^3}\cdot\sqrt[3]{m^2\cdot n^2}=m^2\cdot\sqrt[3]{m^2n^2}.$

Відповідь. $m^2\cdot\sqrt[3]{m^2n^2}$.

б) $\sqrt[4]{16a^3b^{11}}=\sqrt[4]{2^4\cdot a^3\cdot b^8\cdot b^3}=\sqrt[4]{2^4}\cdot\sqrt[4]{\left(b^2\right)^4}\cdot\sqrt[4]{a^3b^3}=$

$=|2|\cdot\left|b^2\right|\cdot\sqrt[4]{a^3b^3}=2b^2\cdot\sqrt[4]{a^3b^3}.$

Відповідь. $2b^2\cdot\sqrt[4]{a^3b^3}$.

Приклад 3. Позбутися ірраціональності в знаменнику дробу:

а) $\frac{3}{\sqrt{3}}$; б) $\frac{5}{\sqrt[3]{5}}$.

Розв'язання.

а) $\frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{\left(\sqrt{3}\right)^2} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$.

Відповідь. $\sqrt{3}$.

б) $\frac{5}{\sqrt[3]{5}} = \frac{5\cdot\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{5^2}} = \frac{5\cdot\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5^3}} = \frac{5\cdot\sqrt[3]{25}}{5} = \sqrt[3]{25}$.

Відповідь. $\sqrt[3]{25}$.

Приклад 4. Спростити вирази:

а) $\sqrt{a^4\sqrt[3]{a^2}}$; б) $\sqrt[5]{a\sqrt[4]{a}}$, $a \ge 0$.

Розв'язання.

а) $\sqrt{a^4\sqrt[3]{a^2}} = \sqrt{\sqrt[3]{a^{12}\cdot a^2}} = \sqrt[6]{a^{14}} = \sqrt[6]{a^{12}\cdot a^2} = \sqrt[6]{\left(a^2\right)^6}\cdot\sqrt[6]{a^2} =$

$= |a^2|\cdot\sqrt[6]{|a|^2} = |a^2|\cdot\sqrt[3]{|a|} = a^2\cdot\sqrt[3]{|a|}$.

Відповідь. $a^2\cdot\sqrt[3]{|a|}$.

б) $\sqrt[5]{a\sqrt[4]{a}}$, $a \ge 0$;

$\sqrt[5]{a\sqrt[4]{a}} = \sqrt[5]{\sqrt[4]{a^4\cdot a}} = \sqrt[20]{a^5} = \sqrt[4]{a}$.

Відповідь. $\sqrt[4]{a}$.

Вправи для самостійного розв'язування

Перевір себе

1. Знайти значення виразу:

1) $16^{\frac{3}{4}}$; 2) $27^{-\frac{1}{3}}$; 3) $(-27)^{\frac{1}{3}}$; 4) $\frac{\sqrt[4]{27\sqrt[3]{9}}}{\sqrt[6]{9\cdot 3^2\sqrt{3}}}$;

5) $\left(\frac{2^{-\frac{2}{3}}\cdot 7^3}{2^{-10}\cdot 6^{-\frac{2}{3}}}\right)^{\frac{3}{2}}\cdot\left(\frac{7^{-\frac{9}{4}}\cdot 2^{\frac{1}{2}}}{6^{\frac{1}{2}}\cdot 4^{\frac{9}{2}}}\right)^2$; 6) $\left(\frac{2^{1,3}\cdot 2^{1,4}}{2^{0,7}}\right)^{\frac{3}{2}}\cdot\left(\frac{7^{-\frac{4}{3}}\cdot 7^{-\frac{3}{4}}}{7^{-\frac{1}{12}}}\right)^{-\frac{1}{2}}$;

7) $\sqrt[3]{-25}\cdot\sqrt[6]{25}$.

2. Позбутися ірраціональності в знаменнику дробу:

1) $\frac{1}{\sqrt{5}}$; 2) $\frac{4}{\sqrt[3]{2}}$; 3) $\frac{8}{\sqrt[4]{8}}$; 4) $\frac{3}{\sqrt{6}}$; 5) $\frac{1}{\sqrt[3]{9}}$; 6) $\frac{6}{\sqrt[4]{2}}$.

3. Винести множник за знак радикала:

1) $\sqrt{x^3y^5}$; 2) $\sqrt[3]{x^5y^7}$; 3) $\sqrt[4]{a^4b^6}$;

4) $\sqrt[5]{486c^{12}}$; 5) $\sqrt[6]{x^8y^6}$; 6) $\sqrt[3]{128a^{10}}$.

4. Спростити вирази:

1) $\sqrt{a^2\sqrt[3]{a^2}}$; 2) $\sqrt[3]{a\sqrt{a}}$; 3) $a\sqrt[4]{a^2}$.

§ 2. Формули скороченого множення

Це треба знати!

1. Формули скороченого множення

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b);\ \ (a+b)^2=a^2+2ab+b^2;$$

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2;\ (a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3;$$

$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3;\ \ a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2);$$

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2);\ \ ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2),$$

де x_1 і x_2 — корені рівняння $ax^2+bx+c=0$.

Самовчитель

Приклад 1. Спростити вираз

$$\left(\frac{3a+2}{3a^2+1}-\frac{18a^3-a-9}{9a^4-1}+\frac{3a-2}{3a^2-1}\right):\frac{a^2+10a+25}{9a^4-1}.$$

Розв'язання.

1) $$\frac{3a+2}{3a^2+1}-\frac{18a^3-a-9}{9a^4-1}+\frac{3a-2}{3a^2-1}=\frac{3a+2}{3a^2+1}-\frac{18a^3-a-9}{(3a^2-1)(3a^2+1)}+$$

$$+\frac{3a-2}{3a^2-1}=\frac{(3a+2)(3a^2-1)-(18a^3-a-9)+(3a-2)(3a^2+1)}{(3a^2-1)(3a^2+1)}=$$

$$=\frac{9a^3-3a+6a^2-2-18a^3+a+9+9a^3+3a-6a^2-2}{(3a^2-1)(3a^2+1)}=$$

$$=\frac{a+5}{(3a^2-1)(3a^2+1)};$$

2) $\dfrac{a+5}{(3a^2-1)(3a^2+1)}:\dfrac{a^2+10a+25}{9a^4-1}=$

$=\dfrac{a+5}{(3a^2-1)(3a^2+1)}\cdot\dfrac{(3a^2-1)(3a^2+1)}{(a+5)^2}=$

$$\frac{\overset{1}{\cancel{(a+5)}}\,\overset{1}{\cancel{(3a^2-1)}}\,\overset{1}{\cancel{(3a^2+1)}}}{\underset{1}{\cancel{(3a^2-1)}}\,\underset{1}{\cancel{(3a^2+1)}}\,\underset{a+5}{\cancel{(a+5)^2}}}=\frac{1}{a+5}.$$

Відповідь. $\dfrac{1}{a+5}$.

Приклад 2. Спростити вираз

$$\left(\frac{3}{9-m^2}+\frac{2m-1}{m-3}-\frac{m^2-4}{m^2+6m+9}\cdot\frac{m+3}{m-2}\right):\frac{m}{m-3}.$$

Розв'язання.

1) $\dfrac{m^2-4}{m^2+6m+9}\cdot\dfrac{m+3}{m-2}=\dfrac{(m-2)(m+2)}{(m+3)^2}\cdot\dfrac{m+3}{m-2}=$

$$=\frac{\overset{1}{\cancel{(m-2)}}(m+2)\overset{1}{\cancel{(m+3)}}}{(m+3)^2\,\underset{1}{\cancel{(m-2)}}}=\frac{m+2}{m+3};$$

2) $\dfrac{3}{9-m^2}+\dfrac{2m-1}{m-3}-\dfrac{m+2}{m+3}=$

$$=\frac{3}{(3-m)(3+m)}-\frac{2m-1}{3-m}-\frac{m+2}{m+3}=$$

$$=\frac{3-(3+m)(2m-1)-(3-m)(m+2)}{(3-m)(3+m)}=$$

$$=\frac{3-(6m-3+2m^2-m)-(3m+6-m^2-2m)}{(3-m)(3+m)}=$$

$$=\frac{3-6m+3-2m^2+m-3m-6+m^2+2m}{(3-m)(3+m)}=$$

$$=\frac{-m^2-6m}{(3-m)(3+m)}=\frac{-m(m+6)}{(3-m)(m+3)}=$$

$$=\frac{m(m+6)}{(m-3)(m+3)};$$

3) $\dfrac{m(m+6)}{(m-3)(m+3)}:\dfrac{m}{m-3}=\dfrac{\cancel{m}^{1}(m+6)\cancel{(m-3)}^{1}}{\cancel{m}_{1}\cancel{(m-3)}_{1}(m+3)}=\dfrac{m+6}{m+3}.$

Відповідь. $\dfrac{m+6}{m+3}.$

Приклад 3. Спростити вираз $\sqrt{7-2\sqrt{6}}$.

Розв'язання.

$7-2\sqrt{6}=7-2\cdot1\cdot\sqrt{6}=\left(1-\sqrt{6}\right)^2;$

$\sqrt{7-2\sqrt{6}}=\sqrt{\left(1-\sqrt{6}\right)^2}=\left|1-\sqrt{6}\right|=-\left(1-\sqrt{6}\right)=\sqrt{6}-1.$

Відповідь. $\sqrt{6}-1.$

Приклад 4. Позбутися ірраціональності у знаменнику дробу:

а) $\dfrac{2}{\sqrt{3}+1}$; б) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{2}}$.

Розв'язання.

а) $\dfrac{2}{\sqrt{3}+1}=\dfrac{2\left(\sqrt{3}-1\right)}{\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{3}-1\right)}=$

$=\dfrac{2\left(\sqrt{3}-1\right)}{\left(\sqrt{3}\right)^2-1^2}=\dfrac{2\left(\sqrt{3}-1\right)}{3-1}=$

$=\dfrac{2\left(\sqrt{3}-1\right)}{2}=\sqrt{3}-1.$

Відповідь. $\sqrt{3}-1.$

б) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{2}}=\dfrac{\sqrt{3}\left(\sqrt[3]{5^2}+\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{2^2}\right)}{\left(\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{2}\right)\left(\sqrt[3]{5^2}+\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{2^2}\right)}=$

$=\dfrac{\sqrt{3}\left(\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{4}\right)}{\left(\sqrt[3]{5}\right)^3-\left(\sqrt[3]{2}\right)^3}=\dfrac{\sqrt{3}\left(\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{4}\right)}{5-2}=$

$=\dfrac{\sqrt{3}\left(\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{4}\right)}{3}.$

Відповідь. $\dfrac{\sqrt{3}\left(\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{4}\right)}{3}.$

Приклад 5. Спростити вираз $\left(\sqrt{ab}-\frac{ab}{a+\sqrt{ab}}\right):\frac{\sqrt[4]{ab}-\sqrt{b}}{a-b}$.

Розв'язання.

1) $\sqrt{ab}-\frac{ab}{a+\sqrt{ab}}=\frac{\sqrt{ab}\left(a+\sqrt{ab}\right)-ab}{a+\sqrt{ab}}=\frac{a\cdot\sqrt{ab}+ab-ab}{a+\sqrt{ab}}=$

$$=\frac{a\sqrt{ab}}{a+\sqrt{ab}}=\frac{a\sqrt{ab}\left(a-\sqrt{ab}\right)}{\left(a+\sqrt{ab}\right)\left(a-\sqrt{ab}\right)}=\frac{a^2\sqrt{ab}-a^2b}{a^2-\left(\sqrt{ab}\right)^2}=\frac{a^2\left(\sqrt{ab}-b\right)}{a^2-ab}=$$

$$=\frac{a^{\cancel{2}}\left(\sqrt{ab}-b\right)}{\underset{1}{\cancel{a}}(a-b)}=\frac{a\left(\sqrt{ab}-b\right)}{a-b};$$

2) $\frac{a\left(\sqrt{ab}-b\right)}{a-b}:\frac{\sqrt[4]{ab}-\sqrt{b}}{a-b}=\frac{a\left(\sqrt{ab}-b\right)\left(\cancel{a-b}\right)^1}{\underset{1}{\left(\cancel{a-b}\right)}\left(\sqrt[4]{ab}-\sqrt{b}\right)}=$

$$=\frac{a\left(\sqrt{ab}-b\right)\left(\sqrt[4]{ab}+\sqrt{b}\right)}{\left(\sqrt[4]{ab}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt[4]{ab}+\sqrt{b}\right)}=\frac{a\left(\sqrt{ab}-b\right)\left(\sqrt[4]{ab}+\sqrt{b}\right)}{\left(\sqrt[4]{ab}\right)^2-\left(\sqrt{b}\right)^2}=$$

$$=\frac{a\left(\overset{1}{\cancel{\sqrt{ab}-b}}\right)\left(\sqrt[4]{ab}+\sqrt{b}\right)}{\underset{1}{\cancel{\sqrt{ab}-b}}}=a\left(\sqrt[4]{ab}+\sqrt{b}\right).$$

Відповідь. $a\left(\sqrt[4]{ab}+\sqrt{b}\right)$.

Приклад 6. Спростити вираз

$$\left(\frac{\sqrt[4]{ax^3}-\sqrt[4]{a^3x}}{\sqrt{a}-\sqrt{x}}+\frac{1+\sqrt{ax}}{\sqrt[4]{ax}}\right)^{-2}\cdot\sqrt{1+2\sqrt{\frac{a}{x}}+\frac{a}{x}}.$$

Розв'язання.

1) $\frac{\sqrt[4]{ax^3}-\sqrt[4]{a^3x}}{\sqrt{a}-\sqrt{x}}+\frac{1+\sqrt{ax}}{\sqrt[4]{ax}}=-\frac{\sqrt[4]{ax}\left(\overset{1}{\cancel{\sqrt{x}-\sqrt{a}}}\right)}{\underset{1}{\cancel{\sqrt{x}-\sqrt{a}}}}+\frac{1+\sqrt{ax}}{\sqrt[4]{ax}}=$

$$=-\sqrt[4]{ax}+\frac{1+\sqrt{ax}}{\sqrt[4]{ax}}=\frac{-\left(\sqrt[4]{ax}\right)^2+1+\sqrt{ax}}{\sqrt[4]{ax}}=$$

$$=\frac{-\cancel{\sqrt{ax}}+1+\cancel{\sqrt{ax}}}{\sqrt[4]{ax}}=\frac{1}{\sqrt[4]{ax}};$$

2) $\left(\frac{1}{\sqrt[4]{ax}}\right)^{-2}=\left(\sqrt[4]{ax}\right)^2=\sqrt{ax};$

3) $\sqrt{1+2\sqrt{\dfrac{a}{x}}+\dfrac{a}{x}}=\sqrt{\left(1+\sqrt{\dfrac{a}{x}}\right)^2}=\left|1+\sqrt{\dfrac{a}{x}}\right|=1+\sqrt{\dfrac{a}{x}}$;

4) $\sqrt{ax}\cdot\left(1+\sqrt{\dfrac{a}{x}}\right)=\sqrt{ax}\cdot\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{a}}{\sqrt{x}}=\dfrac{\sqrt{a}\cdot\overset{1}{\cancel{\sqrt{x}}}\cdot\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)}{\underset{1}{\cancel{\sqrt{x}}}}=$

$=\sqrt{a}\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)$.

Відповідь. $\sqrt{a}\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)$.

Приклад 7. Обчислити $\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}+\sqrt[3]{10-6\sqrt{3}}$.

Розв'язання.

Нехай $\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}+\sqrt[3]{10-6\sqrt{3}}=A$,

тоді $\left(\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}+\sqrt[3]{10-6\sqrt{3}}\right)^3=A^3$;

$10+6\sqrt{3}+3\cdot\sqrt[3]{\left(10+6\sqrt{3}\right)^2}\cdot\sqrt[3]{10-6\sqrt{3}}+$

$+3\cdot\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{\left(10-6\sqrt{3}\right)^2}+10-6\sqrt{3}=A^3$;

$20+3\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{10-6\sqrt{3}}\left(\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}+\sqrt[3]{10-6\sqrt{3}}\right)=A^3$;

$20+3\cdot\sqrt[3]{\left(10+6\sqrt{3}\right)\left(10-6\sqrt{3}\right)}\cdot A=A^3$;

$20+3\cdot\sqrt[3]{10^2-\left(6\sqrt{3}\right)^2}\cdot A=A^3$;

$20+3\cdot\sqrt[3]{100-108}\cdot A=A^3$;

$20+3\cdot\sqrt[3]{-8}\cdot A=A^3$;

$20+3(-2)\cdot A=A^3$;

$A^3+6A-20=0$;

$A^3-4A+10A-20=0$;

$A\left(A^2-4\right)+10(A-2)=0$;

$A(A-2)(A+2)+10(A-2)=0$;

$(A-2)\left(A(A+2)+10\right)=0$;

$(A-2)(A^2+2A+10)=0;\quad \left[\begin{array}{l} A-2=0 \\ A^2+2A+10=0 \end{array}\right.$ (рівняння дійсних коренів не має, оскільки $D=2^2-4\cdot 1\cdot 10<0$).

$A=2$.

Відповідь. 2.

Приклад 8. Скоротити дріб $\dfrac{x^2+3x-4}{x^3-7x^2+14x-8}$.

Розв'язання.

Розкладемо квадратний тричлен x^2+3x-4 на множники, для чого розв'яжемо рівняння $x^2+3x-4=0$:

$D=3^2-4\cdot 1(-4)=9+16=25;$

$x_1=\dfrac{-3+5}{2}=1;\qquad x_2=\dfrac{-3-5}{2}=\dfrac{-8}{2}=-4.$

Отже, $x^2+3x-4=(x-1)(x+4)$.

Тоді, $\dfrac{x^2+3x-4}{x^3-7x^2+14x-8}=\dfrac{(x-1)(x+4)}{(x^3-8)+(14x-7x^2)}=$

$$=\frac{(x-1)(x+4)}{(x-2)(x^2+2x+4)+7x(2-x)}=$$

$$=\frac{(x-1)(x+4)}{(x-2)(x^2+2x+4)-7x(x-2)}=\frac{(x-1)(x+4)}{(x-2)(x^2+2x+4-7x)}=$$

$$=\frac{(x-1)(x+4)}{(x-2)(x^2-5x+4)}=\frac{\overset{1}{\cancel{(x-1)}}(x+4)}{(x-2)\underset{1}{\cancel{(x-1)}}(x-4)}=$$

$$=\frac{x+4}{(x-2)(x-4)}=\frac{x+4}{x^2-6x+8}.$$

Відповідь. $\dfrac{x+4}{x^2-6x+8}$.

Вправи для самостійного розв'язування

Перевір себе

1. Спростити вирази:

1) $\left(\dfrac{a-3}{a^2-3a+9}-\dfrac{ab-3b}{a^3+27}\right):\dfrac{a-b+3}{a^3b+27b}$;

2) $\left(\dfrac{b^2+9}{27-3b^2}+\dfrac{b}{3b+9}-\dfrac{3}{b^2-3b}\right):\dfrac{(3b+9)^2}{3b^2-b^3}$;

3) $\left(x-\dfrac{x+y}{x-y}+y\right):\left(1-\dfrac{2y+1}{x^2-y^2}\right)$;

4) $\left(\dfrac{3x+2}{2x+3}-\dfrac{4x-1}{2x+3}-\dfrac{2x^2+3x}{4x^2+12x+9}\right):\dfrac{3-2x}{2x+3}$;

5) $\dfrac{x^3-9y^2x}{9y^2+x^2}\cdot\left(\dfrac{x+3y}{x^2-3xy}+\dfrac{x-3y}{3xy+x^2}\right)$;

6) $\dfrac{1}{x}\cdot\left(\dfrac{y^2-xy}{x+y}\right)^2\cdot\left(\dfrac{x+y}{(x-y)^2}+\dfrac{x+y}{xy-y^2}\right)+\dfrac{x^2}{x+y}$;

7) $\left(\dfrac{a+4b}{2b}-\dfrac{6b}{4b-a}\right)\cdot\left(1-\dfrac{a^2-2ab+4b^2}{a^2-4b^2}\right)$;

8) $\left(\dfrac{81x^2-48xy}{24xy-16y^2}-4\right):\left(\dfrac{9x-8y}{3x-2y}+\dfrac{24y-27x}{2y}\right)$;

9) $\dfrac{x-2}{(2x+4)^2}:\left(\dfrac{x}{2x-4}-\dfrac{x^2+4}{2x^2-8}-\dfrac{2}{x^2+2x}\right)$;

10) $\left(\dfrac{5a+5b}{a^3-b^3}-\dfrac{a+b}{a^2+ab+b^2}\right):\dfrac{b-a+5}{a^3-b^3}$;

11) $\sqrt{5-2\sqrt{6}}$;

12) $\left(\sqrt{9-6\sqrt{2}}-\sqrt{6}\right)^2$;

13) $\dfrac{\sqrt{a^2-4ab+4b^2}}{\sqrt{a^2+4ab+4b^2}}-\dfrac{8ab}{a^2-4b^2}+\dfrac{2b}{a-2b}$, $0<a<2b$;

14) $\dfrac{\sqrt{7+4\sqrt{3}}\cdot\sqrt{19-8\sqrt{3}}}{4-\sqrt{3}}-\sqrt{3}$.

2. Позбутися ірраціональності у знаменнику дробу:

1) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{6}-\sqrt[3]{5}}$; 2) $\dfrac{3}{\sqrt[4]{5}+\sqrt[4]{2}}$; 3) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}+1}$;

4) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{3}-\sqrt[4]{2}}$; 5) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{9}}$; 6) $\dfrac{1}{\sqrt{2}-\sqrt[4]{2}}$;

7) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}+\sqrt{2}}$.

3. Спростити вирази:

1) $\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}+1}{a-\sqrt{ab}}+\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2\sqrt{ab}}\left(\dfrac{\sqrt{a}}{b-\sqrt{ab}}+\dfrac{\sqrt{a}}{b+\sqrt{ab}}\right)$;

2) $\left(\dfrac{1}{a+\sqrt{2}}-\dfrac{a^2+4}{a^3+2\sqrt{2}}\right):\left(\dfrac{a}{2}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{a}\right)^{-1}$;

3) $\left(\dfrac{\sqrt[4]{ab^3}+\sqrt[4]{a^3b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\dfrac{1-\sqrt{ab}}{\sqrt[4]{ab}}\right):\left(\dfrac{a-\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a}-1}-\dfrac{a+\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{a}+1}\right)$;

4) $\left(\dfrac{3x^{-\frac{1}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}-2x^{-\frac{1}{3}}}-\dfrac{x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{4}{3}}-x^{\frac{1}{3}}}\right)^{-1}-\left(\dfrac{1-2x}{3x-2}\right)^{-1}$.

4. Знайти значення виразу:

1) $\sqrt{7+4\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}$; 2) $\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{4-2\sqrt{3}}$;

3) $\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{6}}{\sqrt{7}-\sqrt{6}}-2\sqrt{42}$; 4) $\sqrt{2-\sqrt{3}}\cdot\sqrt[4]{7-4\sqrt{3}}$;

5) $\dfrac{9}{5-\sqrt{7}}+\dfrac{22}{7+\sqrt{5}}-\dfrac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$; 6) $\sqrt[3]{1+\sqrt{2}}\cdot\sqrt[6]{3-2\sqrt{2}}$;

7) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{100}+\sqrt{99}}$.

5. Скоротити дроби:

1) $\dfrac{2x^2+9x+7}{x^2-1}$; 2) $\dfrac{2x^2+5x-3}{2x^2-x}$;

3) $\dfrac{(a+3)^2-49}{24-2a-a^2}$; 4) $\dfrac{27x^3+8y^3}{3x+2y}$;

5) $\dfrac{4+2a+a^2}{a^3-8}$; 6) $\dfrac{1-x+x^2}{x^3+1}$;

7) $\dfrac{c^3-3c^2}{c^4-6c^3+9c^2}$; 8) $\dfrac{a^2+bc-b^2-ac}{ab-c^2+ac+b^2}$;

9) $\dfrac{x^2-8x+15}{x^2+7x-30}$; 10) $\dfrac{x^4-9x^2+54x-81}{x^3+27}$;

11) $\dfrac{a^3-1}{a^4-a^2-2a-1}$.

§ 3. Тотожні перетворення логарифмічних виразів

Це треба знати!

1. Означення логарифма. Основна логарифмічна тотожність

Логарифмом числа b ($b > 0$) за основою a ($a > 0$, $a \neq 1$) називається показник степеня, до якого треба піднести основу a, щоб дістати число b.

$a^{\log_a b} = b$ (основна логарифмічна тотожність).

Рівність $\log_a b = x$ означає, що $a^x = b$.

Наприклад:

$\log_3 27 = 3$, бо $3^3 = 27$; $\log_2 \frac{1}{8} = -3$, бо $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$.

Логарифми за основою 10 називаються ***десятковими*** і позначаються lg.

Логарифми за основою e ($e \approx 2{,}7$) називаються ***натуральними*** і позначаються ln.

Властивості логарифмів

1) $\log_a a = 1$;
2) $\log_a 1 = 0$;
3) $\log_a (bc) = \log_a b + \log_a c$, $b > 0$, $c > 0$;
4) $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$, $b > 0$, $c > 0$;
5) $\log_a b^n = n \cdot \log_a b$, $b > 0$;
6) $\log_{a^m} b = \frac{1}{m} \cdot \log_a b$, $b > 0$;
7) $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$, $b > 0$, $c > 0$, $c \neq 1$.

Зокрема, $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$ або $\log_a b \cdot \log_b a = 1$.

Самовчитель

Приклад 1. Знайти значення виразу:

а) $25^{\frac{1}{\log_6 5}} + 7^{\frac{1}{\log_5 7}}$; б) $\log_{\frac{3}{5}} \left(\log_{32} 8\right)$; в) $-\log_2 \left(\log_2 \sqrt{\sqrt[4]{2}}\right)$;

г) $2^{\frac{4}{\log_{30} 16}}$; д) $\log_a^2 b + \log_a b^2 + 1$, якщо $\log_{ab} a = 0{,}2$;

е) $\lg 72$, якщо $\lg 2 = a$, $\lg 3 = b$.

Розв'язання.

а) $25^{\frac{1}{\log_6 5}} + 7^{\frac{1}{\log_5 7}} = 5^{2\log_5 6} + 7^{\log_7 5} =$

$= 5^{\log_5 6^2} + 7^{\log_7 5} = 6^2 + 5 = 36 + 5 = 41.$

Відповідь. 41.

б) $\log_{\frac{3}{5}}\left(\log_{32} 8\right) = \log_{\frac{3}{5}}\left(\log_{2^5} 2^3\right) = \log_{\frac{3}{5}}\left(3 \cdot \frac{1}{5}\log_2 2\right) = \log_{\frac{3}{5}} \frac{3}{5} = 1.$

Відповідь. 1.

в) $-\log_2\left(\log_2 \sqrt{\sqrt[4]{2}}\right) = -\log_2\left(\log_2 \sqrt[8]{2}\right) = -\log_2\left(\log_2 2^{\frac{1}{8}}\right) =$

$= -\log_2\left(\frac{1}{8}\log_2 2\right) = -\log_2 \frac{1}{8} = -\log_2 2^{-3} = 3\log_2 2 = 3 \cdot 1 = 3.$

Відповідь. 3.

г) $2^{\frac{4}{\log_{30} 16}} = \left(2^4\right)^{\log_{16} 30} = 16^{\log_{16} 30} = 30.$

Відповідь. 30.

д) Оскільки $\log_{ab} a = \dfrac{1}{\log_a ab} = \dfrac{1}{\log_a a + \log_a b} = \dfrac{1}{1 + \log_a b} = 0,2,$

то $1 + \log_a b = \dfrac{1}{0,2}$.

Тоді $1 + \log_a b = 5;\ \log_a b = 4;$

$\log_a^2 b + \log_a b^2 + 1 = \log_a^2 b + 2\log_a b + 1 =$

$= 4^2 + 2 \cdot 4 + 1 = 16 + 8 + 1 = 25.$

Відповідь. 25.

е) $\lg 72 = \lg(8 \cdot 9) = \lg 8 + \lg 9 = \lg 2^3 + \lg 3^2 =$

$= 3\lg 2 + 2\lg 3 = 3a + 2b.$

Відповідь. $3a + 2b$.

Приклад 2. Спростити вираз $\dfrac{1 - \log_a^3 b}{\left(\log_a b + \log_b a + 1\right)\log_a \dfrac{a}{b}}$.

Розв'язання.

$$\frac{1 - \log_a^3 b}{\left(\log_a b + \log_b a + 1\right)\log_a \dfrac{a}{b}} =$$

$$= \frac{\left(1 - \log_a b\right)\left(1 + \log_a b + \log_a^2 b\right)}{\left(\log_a b + \dfrac{1}{\log_a b} + 1\right)\left(\log_a a - \log_a b\right)} =$$

$$= \frac{\dfrac{(1-\log_a b)\left(1+\log_a b+\log_a^2 b\right)}{\left(\log_a^2 b+\log_a b+1\right)(1-\log_a b)}}{\log_a b} =$$

$$= \frac{\log_a b\cdot\left(\overset{1}{\cancel{1-\log_a b}}\right)\left(\overset{1}{\cancel{1+\log_a b+\log_a^2 b}}\right)}{\left(\underset{1}{\cancel{1-\log_a b}}\right)\left(\underset{1}{\cancel{1+\log_a b+\log_a^2 b}}\right)} = \log_a b.$$

Відповідь. $\log_a b$.

Перевір себе

Вправи для самостійного розв'язування

1. Знайти значення виразу:

1) $\log_{\frac{1}{7}}\sqrt[3]{49}$; 2) $\log_{\frac{1}{16}}\sqrt[3]{4}$; 3) $\log_{0,32}\left(\dfrac{2}{5}\sqrt{2}\right)$;

4) $\log_7\dfrac{1}{7}$; 5) $\log_{\sqrt{3}}9$; 6) $\log_{\frac{1}{9}}\sqrt[16]{27}$;

7) $\log_{\frac{1}{8}}\log_{\sqrt[3]{2}}\sqrt[3]{4}$; 8) $\log_8\left(\dfrac{1}{4}\right)^7$; 9) $10^{3\lg 2}$;

10) $4^{\frac{1}{2}+\log_{32}\sqrt{2}}$; 11) $3^{\log_3 2+\log_{27}3}$; 12) $1000^{2\lg 3}$;

13) $36^{0,5-\log_6\sqrt{5}}$; 14) $5^{\frac{2}{\log_2 5}}$; 15) $-\log_3\log_3\sqrt[3]{\sqrt[3]{3}}$;

16) $81^{\frac{1}{\log_5 3}}+27^{\frac{1}{\log_6 3}}+9^{\frac{1}{\log_7 3}}$; 17) $\log_2 14-\log_2 7$;

18) $\log_2 18+2\log_2\dfrac{5}{3}+\log_2\dfrac{1}{25}$; 19) $\log_4\log_2\sqrt{16}$;

20) $5^{\log_{5\sqrt{5}}8}$; 21) $81^{\frac{1}{\log_5 3}}+27^{\log_9 36}+3^{\frac{4}{\log_7 9}}$;

22) $-\log_2\log_2\sqrt{\sqrt[4]{2}}$; 23) $\sqrt{25^{\frac{1}{\log_6 5}}+49^{\frac{1}{\log_8 7}}}$;

24) $36^{\log_6 5}+10^{1-\lg 2}-3^{\log_9 36}$; 25) $\left(3^{2+\frac{1}{\log_2 3}}+7\cdot 16^{\frac{1}{2\log_3 4}}+10\right)^{\frac{1}{2}}$;

26) $\left(8\cdot 125^{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\log_5 4}+27^{\log_{81}16}\right)\cdot 49^{\log_7\sqrt{2}}$;

27) $5^{\frac{1}{2\log_8 5}}\cdot 5^{\log_5^2 8}-\sqrt{3}\cdot 8^{\log_5 8}+\left(\sqrt{5}\right)^{\log_5 9}$;

28) $\log_5 10$, якщо $\log_5 2=a$;

29) $\log_7 12$, якщо $\log_7 2 = a$, $\log_7 3 = b$;

30) $\log_6 27$, якщо $\log_{12} 16 = a$;

31) $\log_{325} 60$, якщо $\log_{12} 5 = a$, $\log_{12} 13 = b$;

32) $\log_{\sqrt{ab}}\left(\dfrac{a}{b}\right) + \log_{ab}\sqrt{a} + \log_{a^2b^2} b$, якщо $\log_b a = 3$.

2. Спростити вираз:

1) $$\frac{\log_a b - \log_{\frac{\sqrt{a}}{b^3}}\sqrt{b}}{\log_{\frac{a}{b}} b - \log_{\frac{a}{b^6}} b} : \log_b\left(a^3 b^{-12}\right);$$

2) $$\frac{\log_a \sqrt{a^2-1}\cdot\log^2_{\frac{1}{a}}\sqrt{a^2-1}}{\log_{a^2}\left(a^2-1\right)\cdot\log_{\sqrt[3]{a}}\sqrt[6]{a^2-1}};$$

3) $$\frac{\log_a b + \log_a\left(b^{\frac{1}{2}\log_b a^2}\right)}{\log_a b - \log_{ab} b}\cdot\frac{\log_{ab} b\cdot\log_a b}{b^{2\log_b \log_a b-1}}.$$

§ 4. Тотожні перетворення тригонометричних виразів

1. Означення тригонометричних функцій

Це треба знати!

· *через прямокутний трикутник* (рис. 1):

$\sin\alpha = \dfrac{a}{c}$;

$\cos\alpha = \dfrac{b}{c}$;

$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{a}{b}$;

$\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{b}{a}$.

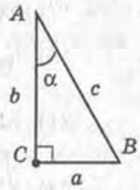


Рис. 1

· *через одиничне коло* (рис. 2):

$\sin\alpha = y$ — ордината точки P_α;

$\cos\alpha = x$ — абсциса точки P_α;

$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$; $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

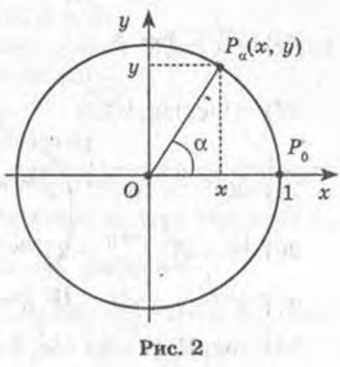


Рис. 2

AB — вісь тангенсів, $AB \parallel Oy$ (рис. 3):
$\operatorname{tg} \alpha = Y_A$ — ордината відповідної точки осі тангенсів.
BC — вісь котангенсів,
$BC \parallel Ox$ (рис. 4):

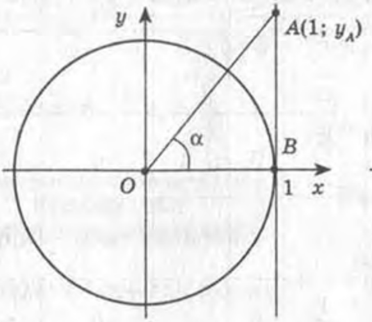


Рис. 3

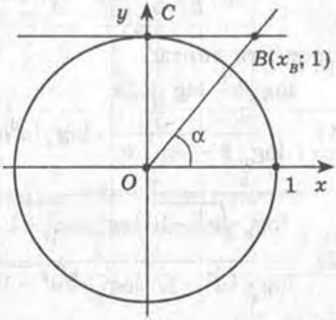


Рис. 4

$\operatorname{ctg} \alpha = X_B$ — абсциса відповідної точки осі котангенсів.

2. Знаки тригонометричних функцій

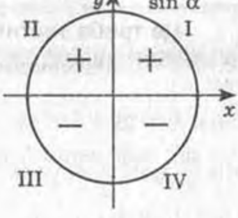


Рис. 5

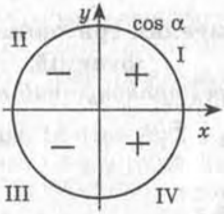


Рис. 6

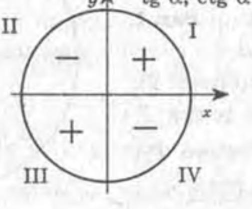


Рис. 7

3. Значення тригонометричних функцій деяких кутів

α	у градусах	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$180°$	$270°$	$360°$
	у радіанах	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\alpha$		0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos\alpha$		1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\operatorname{tg}\alpha$		0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	—	0	—	0
$\operatorname{ctg}\alpha$		—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	—	0	—

4. Періодичність і парність тригонометричних функцій

Парність (непарність) тригонометричних функцій:

функція $\cos\alpha$ — парна: $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$;

функції $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$ — непарні: $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$; $\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$; $\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$.

Періодичність тригонометричних функцій:

функції $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ мають період $2\pi k$, $k \in Z$; найменший додатний період — 2π:

$\sin(\alpha + 2\pi k) = \sin\alpha$; $\cos(\alpha + 2\pi k) = \cos\alpha$, $k \in Z$;

функції $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$ мають період πk, $k \in Z$; найменший додатний період — π:

$\operatorname{tg}(\alpha + \pi k) = \operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}(\alpha + \pi k) = \operatorname{ctg}\alpha$, $k \in Z$.

Більш детальну інформацію про періодичні, парні й непарні функції ви можете знайти в розділі «Функції».

5. Формули зведення

Співвідношення, у яких значення тригонометричних функцій аргументів $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$; $\pi \pm \alpha$; $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$; $2\pi \pm \alpha$ виражаються через $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, називаються ***формулами зведення***.

Щоб записати будь-яку формулу зведення, коли $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, корисно запам'ятати такі правила:

1) якщо $\frac{\pi}{2}$ взято парну кількість разів, то назва даної функції не змінюється; якщо $\frac{\pi}{2}$ взято непарну кількість разів, то назва даної функції змінюється на кофункцію (синус на косинус, тангенс на котангенс і навпаки);
2) перед утвореною функцією ставиться той знак, який має функція, що перетворюється за формулою зведення.

Наприклад,

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha;\ \ \sin(\pi+\alpha)=\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha;$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\sin\alpha;\ \ \mathrm{tg}(\pi-\alpha)=-\mathrm{tg}\,\alpha;\ \ \mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\mathrm{tg}\,\alpha;$$

$$\sin(\alpha-\pi)=\sin(-(\pi-\alpha))=-\sin(\pi-\alpha)=-\sin\alpha;$$

$$\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(-\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha.$$

6. Основні тригонометричні тотожності

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$; $\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha$; $\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$;

$$\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha};\ \ \mathrm{ctg}\,\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha};\ \ \mathrm{tg}\,\alpha\cdot\mathrm{ctg}\,\alpha=1;$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{1}{\mathrm{ctg}\,\alpha};\ \ \mathrm{ctg}\,\alpha=\frac{1}{\mathrm{tg}\,\alpha};$$

$\sec\alpha=\dfrac{1}{\cos\alpha}$ (секанс); $\mathrm{cosec}\,\alpha=\dfrac{1}{\sin\alpha}$ (косеканс);

$$1+\mathrm{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}=\sec^2\alpha;\ \ 1+\mathrm{ctg}^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}=\mathrm{cosec}^2\alpha.$$

7. Формули додавання

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$;
$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$;
$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$;
$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$;

$$\mathrm{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\mathrm{tg}\,\alpha+\mathrm{tg}\,\beta}{1-\mathrm{tg}\,\alpha\cdot\mathrm{tg}\,\beta};\ \ \mathrm{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\mathrm{tg}\,\alpha-\mathrm{tg}\,\beta}{1+\mathrm{tg}\,\alpha\cdot\mathrm{tg}\,\beta};$$

$$\mathrm{ctg}(\alpha+\beta)=\frac{\mathrm{ctg}\,\alpha\cdot\mathrm{ctg}\,\beta-1}{\mathrm{ctg}\,\alpha+\mathrm{ctg}\,\beta};\ \ \mathrm{ctg}(\alpha-\beta)=\frac{\mathrm{ctg}\,\alpha\cdot\mathrm{ctg}\,\beta+1}{\mathrm{ctg}\,\beta-\mathrm{ctg}\,\alpha}.$$

8. Тригонометричні функції подвійного аргументу

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$;

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$;

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha};\quad \operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\alpha},$$

9. Формули зниження степеня

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2};\quad \cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}.$$

Використовуючи формули зниження степеня, можна здійснювати перетворення деяких тригонометричних виразів:

$$\sin^2\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2};\quad \cos^2\frac{x}{2} = \frac{1+\cos x}{2};$$

$$1-\cos 2x = 2\sin^2 x;\quad 1+\cos 2x = 2\cos^2 x;$$

$$1-\cos x = 2\sin^2\frac{x}{2};\quad 1+\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2};$$

$$1-\cos 5x = 2\sin^2\frac{5x}{2};\quad 1+\cos 5x = 2\cos^2\frac{5x}{2};$$

$$1+\sin x = 1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right).$$

10. Формули перетворення суми й різниці тригонометричних функцій на добуток

$$\sin\alpha+\sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\sin\alpha-\sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2};$$

$$\cos\alpha+\cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\cos\alpha-\cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2};$$

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta};\quad \operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta};$$

$$\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta};\quad \operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta = \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}.$$

11. Формули перетворення добутку тригонометричних функцій на суму

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right);$$

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\right);$$

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}\left(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)\right).$$

12. Формули половинного аргументу

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}};\quad \cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}};$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha};$$

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}=\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

13. Співвідношення між $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$

$$\sin\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}};\quad \cos\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}.$$

14. Обернені тригонометричні функції

Арксинусом числа a **(arcsin *a*)** називається кут із проміжку $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, синус якого дорівнює a.

$\arcsin(-a)=-\arcsin a$; $\sin(\arcsin a)=a$;

$\arcsin(\sin\alpha)=\alpha$, якщо $\alpha\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

Наприклад, $\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}$, оскільки $\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ і $\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$;

$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{\pi}{4}$.

Арккосинусом числа a **(arccos *a*)** називається кут із проміжку $[0;\pi]$, косинус якого дорівнює a.

$\arccos(-a) = \pi - \arccos a;$
$\cos(\arccos a) = a;$
$\arccos(\cos\alpha) = \alpha$, якщо $\alpha \in [0; \pi]$.

Наприклад, $\arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$, оскільки $\frac{\pi}{3} \in [0; \pi]$ і $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$;

$$\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \pi - \arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}.$$

Арктангенсом числа a ($\mathrm{arctg}\, a$) називається кут із проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, тангенс якого дорівнює a.

Позначення: $\mathrm{arctg}(-a) = -\mathrm{arctg}\, a$; $\mathrm{tg}(\mathrm{arctg}\, a) = a$;

$\mathrm{arctg}(\mathrm{tg}\,\alpha) = \alpha$, якщо $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Наприклад, $\mathrm{arctg}\, 1 = \frac{\pi}{4}$, оскільки $\frac{\pi}{4} \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ і $\mathrm{tg}\frac{\pi}{4} = 1$;

$$\mathrm{arctg}\left(-\sqrt{3}\right) = -\mathrm{arctg}\sqrt{3} = -\frac{\pi}{3}.$$

Арккотангенсом числа a ($\mathrm{arcctg}\, a$) називається кут із проміжку $(0; \pi)$, котангенс якого дорівнює a.

$\mathrm{arcctg}(-a) = \pi - \mathrm{arcctg}\, a;$
$\mathrm{ctg}(\mathrm{arcctg}\, a) = a;$
$\mathrm{arcctg}(\mathrm{ctg}\,\alpha) = \alpha$, якщо $\alpha \in (0; \pi)$.

Наприклад, $\mathrm{arcctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{6}$, оскільки $\frac{\pi}{6} \in (0; \pi)$ і $\mathrm{ctg}\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$;

$$\mathrm{arcctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \pi - \mathrm{arcctg}\frac{\sqrt{3}}{3} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}.$$

Приклад 1. Обчислити значення виразу:

Самовчитель

а) $\sin 780°$; б) $\cos\frac{13\pi}{6}$;

в) $\sin\left(-\frac{35\pi}{4}\right)$; г) $\mathrm{ctg}\left(-\frac{7\pi}{4}\right)$; д) $\cos\frac{\pi}{5}\cdot\cos\frac{2\pi}{5}$;

е) $\lg\mathrm{tg}\, 5° + \lg\mathrm{tg}\, 7° + \lg\mathrm{tg}\, 85° + \lg\mathrm{tg}\, 83°$.

Розв'язання.

а) $\sin 780° = \sin(360°\cdot 2 + 60°) = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Відповідь. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

б) $\cos\frac{13\pi}{6}=\cos\frac{12\pi+\pi}{6}=\cos\left(2\pi+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$

Відповідь. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

в) $\sin\left(-\frac{35\pi}{4}\right)=-\sin\frac{35\pi}{4}=-\sin\frac{36\pi-\pi}{4}=-\sin\left(9\pi-\frac{\pi}{4}\right)=$

$=-\sin\left(18\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=-\sin\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$

Відповідь. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

г) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{7\pi}{4}\right)=-\operatorname{ctg}\frac{7\pi}{4}=-\operatorname{ctg}\frac{8\pi-\pi}{4}=-\operatorname{ctg}\left(2\pi-\frac{\pi}{4}\right)=$

$=-\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}=1.$

Відповідь. 1.

д) $\cos\frac{\pi}{5}\cdot\cos\frac{2\pi}{5}=\dfrac{2\cos\frac{\pi}{5}\cdot\sin\frac{\pi}{5}\cdot\cos\frac{2\pi}{5}}{2\sin\frac{\pi}{5}}=\dfrac{\sin\frac{2\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}}{2\sin\frac{\pi}{5}}=$

$=\dfrac{2\sin\frac{2\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}}{4\sin\frac{\pi}{5}}=\dfrac{\sin\frac{4\pi}{5}}{4\sin\frac{\pi}{5}}=\dfrac{\sin\frac{5\pi-\pi}{5}}{4\sin\frac{\pi}{5}}=\dfrac{\sin\left(\pi-\frac{\pi}{5}\right)}{4\sin\frac{\pi}{5}}=$

$=\dfrac{\cancelto{1}{\sin\frac{\pi}{5}}}{\cancelto{1}{4\sin\frac{\pi}{5}}}=\frac{1}{4}.$

Відповідь. $\frac{1}{4}$.

е) $\lg\operatorname{tg}5^\circ+\lg\operatorname{tg}7^\circ+\lg\operatorname{tg}85^\circ+\lg\operatorname{tg}83^\circ=(\lg\operatorname{tg}5^\circ+\lg\operatorname{tg}85^\circ)+$

$+(\lg\operatorname{tg}7^\circ+\lg\operatorname{tg}83^\circ)=\lg(\operatorname{tg}5^\circ\cdot\operatorname{tg}85^\circ)+\lg(\operatorname{tg}7^\circ\cdot\operatorname{tg}83^\circ)=$

$=\lg(\operatorname{tg}5^\circ\cdot\operatorname{tg}(90^\circ-5^\circ))+\lg(\operatorname{tg}7^\circ\cdot\operatorname{tg}(90^\circ-7^\circ))=$

$=\lg(\operatorname{tg}5^\circ\cdot\operatorname{ctg}5^\circ)+\lg(\operatorname{tg}7^\circ\cdot\operatorname{ctg}7^\circ)=\lg1+\lg1=0+0=0.$

Відповідь. 0.

Приклад 2. Знайти $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, $\sec\alpha$, $\operatorname{cosec}\alpha$,

якщо $\sin\alpha = -\frac{4}{5}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

Розв'язання.

Оскільки $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$, то

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha} = \pm\sqrt{1-\left(-\frac{4}{5}\right)^2} = \pm\sqrt{1-\frac{16}{25}} = \pm\sqrt{\frac{9}{25}} = \pm\frac{3}{5}.$$

Оскільки кут α лежить у III координатній чверті, то $\cos\alpha < 0$.

Отже, $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{4}{5} : \left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{4\cdot5}{5\cdot3} = \frac{4}{3};$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{3}{4}; \quad \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{1}{-\frac{3}{5}} = -\frac{5}{3};$$

$$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha} = \frac{1}{-\frac{4}{5}} = -\frac{5}{4}.$$

Відповідь. $-\frac{3}{5}$; $\frac{4}{3}$; $\frac{3}{4}$; $-\frac{5}{3}$; $-\frac{5}{4}$.

Приклад 3. $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{7}{24}$, $270° < \alpha < 360°$. Обчислити значення решти тригонометричних функцій.

Розв'язання.

Оскільки $1+\operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$, то $\sin^2\alpha = \frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}$;

$$\sin^2\alpha = \frac{1}{1+\left(-\frac{7}{24}\right)^2} = \frac{1}{1+\frac{49}{576}} = \frac{1}{\frac{625}{576}} = \frac{576}{625};$$

$$\sin\alpha = \pm\sqrt{\frac{576}{625}} = \pm\frac{24}{25}.$$

Оскільки кут α лежить у IV координатній чверті, то $\sin\alpha < 0$.

Отже, $\sin\alpha = -\frac{24}{25}$.

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha};\ \cos\alpha = \operatorname{ctg}\alpha \cdot \sin\alpha = -\frac{7}{24}\cdot\left(-\frac{24}{25}\right) = \frac{7}{25};$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha} = \frac{1}{-\frac{7}{24}} = -\frac{24}{7}.$$

Відповідь. $-\frac{24}{25};\ \frac{7}{25};\ -\frac{24}{7}.$

Приклад 4. Спростити вираз:

а) $\left(\dfrac{\sin\alpha + \sin 3\alpha}{\cos\alpha + \cos 3\alpha}\right)(1 + \cos 4\alpha);$

б) $2\cos^2\left(\dfrac{\alpha}{2} - \dfrac{3}{2}\pi\right) + \sqrt{3}\cos\left(\dfrac{5}{2}\pi - \alpha\right) - 1;$

в) $\sqrt{(\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha)\cdot 2\operatorname{ctg}2\alpha \cdot \operatorname{tg}2\alpha + 2}$, якщо $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \dfrac{3\pi}{4}$.

Розв'язання.

а) $$\left(\frac{\sin\alpha + \sin 3\alpha}{\cos\alpha + \cos 3\alpha}\right)(1 + \cos 4\alpha) = \frac{2\sin 2\alpha\cos\alpha}{2\cos 2\alpha\cos\alpha}\cdot 2\cos^2 2\alpha =$$

$$= \frac{\overset{2}{\cancel{4}}\sin 2\alpha \cdot \overset{1}{\cancel{\cos\alpha}} \cdot \overset{\cos 2\alpha}{\cancel{\cos^2 2\alpha}}}{\underset{1}{\cancel{2}}\ \underset{1}{\cancel{\cos 2\alpha}} \cdot \underset{1}{\cancel{\cos\alpha}}} = 2\sin 2\alpha\cos 2\alpha = \sin 4\alpha.$$

Відповідь. $\sin 4\alpha$.

б) $$2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{3}{2}\pi\right) + \sqrt{3}\cos\left(\frac{5}{2}\pi - \alpha\right) - 1 =$$

$$= 2\sin^2\frac{\alpha}{2} + \sqrt{3}\sin\alpha - 1 = 1 - \cos\alpha + \sqrt{3}\sin\alpha - 1 =$$

$$= -\cos\alpha + \sqrt{3}\sin\alpha = -2\left(\frac{1}{2}\cos\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\right) =$$

$$= -2\left(\sin\frac{\pi}{6}\cos\alpha - \cos\frac{\pi}{6}\sin\alpha\right) =$$

$$= -2\sin\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) = 2\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right).$$

Відповідь. $2\sin\left(\alpha - \dfrac{\pi}{6}\right).$

в) $\sqrt{(\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha)\cdot 2\operatorname{ctg}2\alpha\cdot\operatorname{tg}2\alpha + 2} =$

$$= \sqrt{\left(\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)\cdot 2\frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}\cdot\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} + 2} =$$

$$= \sqrt{\frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}\cdot 2\frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}\cdot\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} + 2} =$$

$$= \sqrt{\frac{2\cos 2\alpha\cdot 2\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha\cdot\sin 2\alpha}\cdot\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} + 2} =$$

$$= \sqrt{\frac{4\cos^2 2\alpha}{\sin^2 2\alpha}\cdot\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} + 2} = \frac{2|\cos 2\alpha|}{|\sin 2\alpha|}\cdot\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} + 2.$$

Оскільки $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{4}$, то $\pi < 2\alpha < \frac{3\pi}{2}$ (кут 2α лежить у III координатній чверті).

Отже, $\cos 2\alpha < 0$, $\sin 2\alpha < 0$;

$$\frac{2|\cos 2\alpha|}{|\sin 2\alpha|}\cdot\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} + 2 = \frac{-2\cos 2\alpha\cdot\sin 2\alpha}{-\sin 2\alpha\cdot\cos 2\alpha} + 2 = 2 + 2 = 4.$$

Відповідь. 4.

Приклад 5. Довести тотожність:

а) $\cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 6\alpha + \cos 7\alpha = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{5\alpha}{2}\cos 4\alpha;$

б) $\sqrt{1\sqrt{0,5 - 0,5\cos 2\alpha}} = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)$, де $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

Розв'язання.

а) $\cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 6\alpha + \cos 7\alpha = (\cos\alpha + \cos 7\alpha) +$

$$+ (\cos 2\alpha + \cos 6\alpha) = 2\cos 4\alpha\cos 3\alpha + 2\cos 4\alpha\cos 2\alpha =$$

$$= 2\cos 4\alpha(\cos 3\alpha + \cos 2\alpha) = 2\cos 4\alpha\left(2\cos\frac{5\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\right) =$$

$$= 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{5\alpha}{2}\cos 4\alpha.$$

$4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{5\alpha}{2}\cos 4\alpha = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{5\alpha}{2}\cos 4\alpha$, тотожність доведено.

б) $\sqrt{1 - \sqrt{0,5 - 0,5\cos 2\alpha}} = \sqrt{1 - \sqrt{0,5(1 - \cos 2\alpha)}} =$

$$= \sqrt{1 - \sqrt{0,5\cdot 2\sin^2\alpha}} = \sqrt{1 - \sqrt{\sin^2\alpha}} = \sqrt{1 - |\sin\alpha|}.$$

Оскільки кут α лежить у III координатній чверті,
то $\sin\alpha < 0$.

Отже, $\sqrt{1-|\sin\alpha|} = \sqrt{1+\sin\alpha} = \sqrt{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)} =$

$$= \sqrt{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)} = \sqrt{2}\left|\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\right|.$$

Оскільки $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, то $-\frac{3\pi}{4} < -\frac{\alpha}{2} < -\frac{\pi}{2}$; $-\frac{\pi}{2} < -\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4} < -\frac{\pi}{4}$

(кут $-\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}$ лежить у IV координатній чверті).

Отже, $\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right) > 0$.

Звідси, $\sqrt{2}\left|\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\right| = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$.

$\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$, тотожність доведено.

Приклад 6. Знайти найбільше і найменше значення виразу $3\sin x + \cos x$.

Розв'язання.

Нехай $3\sin x + \cos x = A$. Поділимо ліву й праву частини даної рівності на $\sqrt{3^2+1^2} = \sqrt{10}$;

$$\frac{3}{\sqrt{10}}\cdot\sin x + \frac{1}{\sqrt{10}}\cos x = \frac{A}{\sqrt{10}}.$$

Оскільки $\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)^2 = \frac{9}{10}+\frac{1}{10} = \frac{10}{10} = 1,$

то знайдеться такий кут φ, коли $\cos\varphi = \frac{3}{\sqrt{10}}$ і $\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{10}}$.

$$\sin x\cdot\cos\varphi + \sin\varphi\cos x = \frac{A}{\sqrt{10}};$$

$$\sin(x+\varphi) = \frac{A}{\sqrt{10}}; \qquad A = \sqrt{10}\cdot\sin(x+\varphi).$$

Отже, $-\sqrt{10} \le A \le \sqrt{10}$.

Відповідь. $-\sqrt{10} \le 3\sin x + \cos x \le \sqrt{10}$.

Приклад 7. Обчислити:

а) $\cos\left(\arcsin\frac{3}{4}\right)$; б) $\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{3}{4}\right)$; в) $\operatorname{ctg}\left(\arcsin\frac{3}{4}\right)$.

Розв'язання.

Оскільки $\frac{3}{4}\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$, то $\alpha=\arcsin\frac{3}{4}$ — радіанна міра гострого кута прямокутного трикутника. Синус цього кута дорівнює $\frac{3}{4}$. Нехай у прямокутному трикутнику (рис. 8) протилежний катет дорівнює 3, а гіпотенуза 4.

Тоді прилеглий катет відносно кута α дорівнюватиме $\sqrt{4^2-3^2}=\sqrt{7}$ (за наслідком із теореми Піфагора).

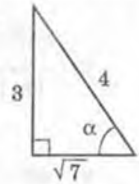


Рис. 8

Отже, $\cos\alpha=\frac{\sqrt{7}}{4}$, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{\sqrt{7}}$, $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\sqrt{7}}{3}$.

Відповідь.

$\cos\left(\arcsin\frac{3}{4}\right)=\frac{\sqrt{7}}{4}$, $\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{3}{4}\right)=\frac{3}{\sqrt{7}}$,

$\operatorname{ctg}\left(\arcsin\frac{3}{4}\right)=\frac{\sqrt{7}}{3}$.

Вправи для самостійного розв'язування

Перевір себе

1. Обчислити:
   1) $\sin 2\alpha$, якщо $\sin\alpha=-0{,}6$, $180°<\alpha<270°$;
   2) $\cos 2\alpha$, якщо $\cos\alpha=-0{,}6$, $270°<\alpha<360°$;
   3) $\cos(\alpha+\beta)$, якщо $\sin\alpha=0{,}6$, $\sin\beta=0{,}8$, $90°<\alpha<180°$, $0°<\beta<90°$;
   4) $\sin(\alpha-\beta)$, якщо $\cos\alpha=\frac{4}{5}$, $\cos\beta=-\frac{5}{13}$, $270°<\alpha<360°$, $90°<\beta<180°$;
   5) $\cos(30°+\alpha)$, якщо $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $180°<\alpha<270°$;
   6) $\sin\frac{x}{2}$, $\cos\frac{x}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, якщо $\sin x=0,6$, $\frac{\pi}{2}<x<\pi$;
   7) $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, якщо $\sin x=-\frac{12}{13}$, $\frac{3\pi}{2}<x<2\pi$.

2. Спростити вирази:

1) $\dfrac{1-\sin^2\alpha}{1-\cos^2\alpha}+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha;$ 2) $\dfrac{\cos^2\alpha-\operatorname{ctg}^2\alpha}{\sin^2\alpha-\operatorname{tg}^2\alpha};$

3) $\dfrac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha};$ 4) $\cos\alpha+\sin 2\alpha-\cos 3\alpha;$

5) $\dfrac{\sin 4\alpha+\sin 5\alpha+\sin 6\alpha}{\cos 4\alpha+\cos 5\alpha+\cos 6\alpha};$ 6) $\dfrac{1+\sin\alpha-2\sin^2\left(45^\circ-\dfrac{\alpha}{2}\right)}{4\cos\dfrac{\alpha}{2}};$

7) $\dfrac{\cos\left(\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)}{\sin(\pi-\alpha)}+\dfrac{\operatorname{tg}(\alpha-\pi)\cdot\cos(\pi+\alpha)}{\sec\left(\dfrac{3}{2}\pi+\alpha\right)};$

8) $\sin^2\left(\dfrac{\alpha}{2}+2\beta\right)-\sin^2\left(\dfrac{\alpha}{2}-2\beta\right);$

9) $\dfrac{1}{\cos\alpha+\cos 3\alpha}+\dfrac{1}{\cos 3\alpha+\cos 5\alpha};$

10) $\dfrac{1}{\sin\alpha-\sin 3\alpha}-\dfrac{1}{\sin 3\alpha-\sin 5\alpha};$

11) $\left(\dfrac{1}{\cos\alpha}+\dfrac{1}{\cos 3\alpha}\right)(\cos\alpha+\cos 5\alpha)-2;$

12) $\left(\dfrac{\sin\alpha}{\sin 2\alpha}-\dfrac{\cos\alpha}{\cos 2\alpha}\right)\cdot\dfrac{\cos\alpha-\cos 7\alpha}{\sin\alpha};$

13) $\dfrac{\sin 2\alpha\,(1+\cos 2\alpha)}{\sin 3\alpha+\sin\alpha}\cdot\dfrac{\cos 4\alpha}{\cos 3\alpha+\cos 5\alpha};$

14) $\dfrac{\sin 2\alpha}{1-\cos 2\alpha}\cdot\dfrac{1-\cos\alpha}{\cos\alpha};$

15) $\left(\dfrac{\sin\alpha-\sin 3\alpha}{\cos\alpha-\cos 3\alpha}\right)\cdot(1-\cos 4\alpha);$

16) $\dfrac{\left(\cos^2\alpha-4\cos^2\dfrac{\alpha}{2}\sin^2\dfrac{\alpha}{2}\right)(\sin\alpha+\sin 3\alpha)}{2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}-1};$

17) $\dfrac{1}{\operatorname{tg}3\alpha+\operatorname{tg}\alpha}-\dfrac{1}{\operatorname{tg}5\alpha-\operatorname{tg}\alpha};$

18) $\dfrac{\sin^2(\alpha-\pi)-4\sin^2\left(\dfrac{3\pi}{2}-\dfrac{\alpha}{2}\right)}{\cos^2\left(\alpha-\dfrac{5\pi}{2}\right)-4+4\cos^2\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\alpha}{2}\right)}$;

19) $\dfrac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos 2\alpha}}-\dfrac{\sin\alpha}{\sqrt{1+\cos 2\alpha}}$, де $0^\circ<\alpha<90^\circ$;

20) $\sqrt{\sin^2\alpha\,(1-\operatorname{ctg}\alpha)+\cos^2\alpha\,(1-\operatorname{tg}\alpha)}$, якщо $\dfrac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$;

21) $\sqrt{\cos^2\beta\,(1+\operatorname{tg}\beta)+\sin^2\beta\,(1+\operatorname{ctg}\beta)}$, якщо $\pi<\beta<\dfrac{3\pi}{2}$;

22) $\dfrac{2\sin^2 3\alpha-1}{2\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{4}+3\alpha\right)\cdot\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}-3\alpha\right)}$;

23) $\left(\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}+\sec\dfrac{\alpha}{2}\right)\cdot\cos\dfrac{\alpha}{2}$.

3. Довести тотожність:

1) $\dfrac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha}-\dfrac{\cos 3\alpha}{\cos\alpha}=2$;

2) $\dfrac{\cos\alpha-\cos 3\alpha}{\sin\alpha+\sin 3\alpha}=\operatorname{tg}\alpha$;

3) $\left(\dfrac{\sin 4\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\cos 4\alpha}{\sin\alpha}\right)\cdot\left(\dfrac{1}{\cos 3\alpha}-\dfrac{1}{\cos\alpha}\right)=4\operatorname{tg}\alpha$;

4) $\dfrac{\sin 3\alpha+\sin\alpha}{\cos 3\alpha+\cos\alpha}=\dfrac{\sin 4\alpha}{1+\cos 4\alpha}$;

5) $\dfrac{\sin^3\dfrac{\alpha}{2}-\sin\dfrac{\alpha}{2}}{\cos^3\dfrac{\alpha}{2}-\cos\dfrac{\alpha}{2}}=\dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$;

6) $\left(\dfrac{1}{\cos 3\alpha}+\dfrac{1}{\cos\alpha}\right)\cdot\left(\dfrac{1}{\sin\alpha}-\dfrac{1}{\sin 3\alpha}\right)=\dfrac{8\cos^2 2\alpha}{\sin 6\alpha}$;

8) $\dfrac{\sin 4\alpha-1}{(\cos 2\alpha-\sin 2\alpha)^2}=-1$;

9) $\dfrac{\sin\alpha-\sin 3\alpha}{\cos\alpha-\cos 3\alpha}(1-\cos 4\alpha)=-\sin 4\alpha$;

10) $$\frac{\left(\cos(2\pi-\alpha)+\sin\left(\frac{3\pi}{2}+5\alpha\right)\right)\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\sin(\pi+5\alpha)\right)}{1+\sin\left(\frac{3\pi}{2}-6\alpha\right)}=$$
$$=\sin 4\alpha;$$

11) $$1-\cos\alpha-\sin\alpha=2\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{4}\right);$$

12) $$\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{4}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{4}\right)\operatorname{tg}\frac{\alpha}{8}}{\sin\left(\frac{5\pi}{2}+\frac{\alpha}{4}\right)-\sin\left(\frac{\alpha}{4}-3\pi\right)\operatorname{tg}\frac{\alpha}{8}}=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{8};$$

13) $$\left(\operatorname{tg}\frac{9\pi}{4}+\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{2}-\alpha\right)\right)^2+\left(\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{4}+\operatorname{ctg}(\pi-\alpha)\right)^2=\frac{2}{\sin^2\alpha};$$

14) $$\frac{\cos\left(\frac{5}{2}\pi-6\alpha\right)+\sin(\pi+4\alpha)+\sin(3\pi-\alpha)}{\sin\left(\frac{5}{2}\pi+6\alpha\right)+\cos(4\alpha-2\pi)+\cos(\alpha+2\pi)}=\operatorname{tg}\alpha;$$

15) $$\frac{1}{4}\sin^2 2\alpha=\frac{\cos 2\alpha}{\operatorname{ctg}^2\alpha-\operatorname{tg}^2\alpha};$$

16) $$\sin 4\alpha-\sin 5\alpha-\sin 6\alpha+\sin 7\alpha=-4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\alpha\sin\frac{11\alpha}{2};$$

17) $$(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2=4\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2};$$

18) $$\frac{\sin^2\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)}{\operatorname{ctg}^2(\alpha-2\pi)}+\frac{\sin^2(-\alpha)}{\operatorname{ctg}^2\left(\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)}=1.$$

4. Знайти найбільше та найменше значення виразу:

1) $\sin x+\cos x$; 2) $\cos x+2\sin x$;

3) $3\cos x-\sin x$; 4) $4\cos x+3\sin x$;

5) $12\sin\alpha-5\cos\alpha$; 6) $15\sin\alpha+8\cos\alpha$;

7) $4\sin\alpha+3\cos\alpha$; 8) $7\sin\alpha-24\cos\alpha$.

5. Обчислити:

1) $\cos\left(\arcsin\frac{5}{13}\right)$; $\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{5}{13}\right)$;

$\operatorname{ctg}\left(\arcsin\frac{5}{13}\right)$; $\sin\left(\arcsin\frac{5}{13}\right)$.

2) $\cos\left(\arccos\frac{3}{5}\right)$; $\sin\left(\arccos\frac{3}{5}\right)$;

$\operatorname{tg}\left(\arccos\frac{3}{5}\right)$; $\operatorname{ctg}\left(\arccos\frac{3}{5}\right)$.

3) $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{3}{4}\right)$; $\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{3}{4}\right)$;

$\cos\left(\operatorname{arctg}\frac{3}{4}\right)$; $\operatorname{ctg}\left(\operatorname{arctg}\frac{3}{4}\right)$.

6. Обчислити значення виразу:

1) $\sin(-420°)$; 2) $\cos 1485°$; 3) $\operatorname{tg}\frac{28\pi}{3}$;

4) $\cos\frac{19\pi}{6}$; 5) $\operatorname{tg}\frac{20\pi}{3}$; 6) $\sin\frac{23\pi}{3}$;

7) $\cos\left(-\frac{11\pi}{4}\right)$; 8) $\operatorname{tg}\left(-\frac{31\pi}{6}\right)$; 9) $\operatorname{ctg}\frac{17\pi}{3}$;

10) $\sin^2\frac{5\pi}{3}-\cos^2\frac{7\pi}{4}+\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{2\pi}{3}$;

11) $\cos\frac{\pi}{7}\cdot\cos\frac{4\pi}{7}\cdot\cos\frac{5\pi}{7}$;

12) $\lg\operatorname{tg}4°+\lg\operatorname{tg}5°+\lg\operatorname{tg}85°+\lg\operatorname{tg}86°$;

13) $\lg\operatorname{tg}1°+\lg\operatorname{tg}2°+\lg\operatorname{tg}3°+\ldots+\lg\operatorname{tg}88°+\lg\operatorname{tg}89°$.

РОЗДІЛ 2. РІВНЯННЯ ТА СИСТЕМИ РІВНЯНЬ

§ 1. Лінійні рівняння і рівняння, що зводяться до них

Це треба знати!

1. Лінійні рівняння

Лінійними рівняннями з однією змінною x називають рівняння виду $ax = b$, де a і b — дійсні числа.

1) Якщо $a \neq 0$, то корінь лінійного рівняння дорівнює $\frac{b}{a}$;
2) якщо $a = 0$, $b = 0$, то коренем лінійного рівняння є будь-яке дійсне число;
3) якщо $a = 0$, $b \neq 0$, то лінійне рівняння коренів не має.

Перетворення, унаслідок яких деякі рівняння зводяться до лінійних:

— якщо в рівнянні деякий доданок перенести з однієї частини в іншу, змінивши його знак, то одержимо рівняння, рівносильне даному;

— якщо обидві частини рівняння помножити або поділити на одне й те саме відмінне від нуля число, то одержимо рівняння, рівносильне даному.

Самовчитель

Приклад 1. Розв'язати рівняння $2x - 3 = 2 - 5x$.

Розв'язання.

$2x + 5x = 2 + 3;$

$7x = 5;$

$x = \frac{5}{7}.$

Відповідь. $\frac{5}{7}$.

Приклад 2. Розв'язати рівняння $2(5x - 4) - 3(4 - x) = 3x + 20$.

Розв'язання.

$10x - 8 - 12 + 3x = 3x + 20;$

$10x + \cancel{3x} - \cancel{3x} = 20 + 8 + 12;$

$10x = 40;$

$x = 40 : 10;$

$x = 4.$

Відповідь. 4.

Приклад 3. Розв'язати рівняння $\frac{x-2}{3}-\frac{3-x}{12}=\frac{x}{4}-2.$

Розв'язання.

Помножимо обидві частини рівняння на 12 (найменше спільне кратне знаменників 3, 4, 12):

$$12\left(\frac{x-2}{3}-\frac{3-x}{12}\right)=12\left(\frac{x}{4}-2\right);$$

$$4(x-2)-(3-x)=3x-24;$$

$$4x-8-3+x=3x-24;$$

$$4x+x-3x=-24+8+3;$$

$$2x=-13;\ \ x=-\frac{13}{2}=-6,5.$$

Відповідь. −6,5.

Це треба знати!

Рівняння виду

$$f_1(x)\cdot f_2(x)\cdot\ldots f_n(x)=0 \text{ та } \frac{p(x)}{q(x)}=0$$

Для того щоб розв'язати рівняння $f_1(x)\cdot f_2(x)\cdot\ldots f_n(x)=0$, треба перейти до сукупності рівнянь $\left[\begin{array}{l} f_1(x)=0, \\ f_2(x)=0, \\ \ldots \\ f_n(x)=0. \end{array}\right.$

Розв'язання рівняння $\frac{p(x)}{q(x)}=0$ ґрунтується на наступному твердженні: дріб $\frac{m}{n}$ дорівнює нулю тоді й тільки тоді, коли його чисельник дорівнює нулю, а знаменник — відмінний від нуля. Таким чином, при переході від рівняння $\frac{p(x)}{q(x)}=0$ до рівняння $p(x)=0$ можуть з'явитися сторонні корені. Відсіяти їх можна за допомогою умови $q(x)\neq 0$.

Самовчитель

Приклад 1. Розв'язати рівняння

$$\frac{x(x+3)}{x-5}=0.$$

Розв'язання.

$$\begin{cases} x(x+3)=0, \\ x-5\neq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x + 3 = 0, \end{array}\right. \\ x \neq 5; \end{cases} \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = -3, \end{array}\right. \\ x \neq 5. \end{cases}$$ Отже, $x = 0$, або $x = -3$.

Відповідь. −3; 0.

Приклад 2. Розв'язати рівняння $\frac{(10-x)(x-2)}{4-x^2} = 0.$

Розв'язання.

$$\begin{cases} (10-x)(x-2) = 0, \\ 4 - x^2 \neq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} 10 - x = 0, \\ x - 2 = 0, \end{array}\right. \\ x \neq -2, \\ x \neq 2; \end{cases} \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 10, \\ x = 2, \end{array}\right. \\ x \neq -2, \\ x \neq 2. \end{cases}$$ Отже, $x = 10$.

Відповідь. 10.

Перевір себе

Вправи для самостійного розв'язування

Розв'язати рівняння:

1) $3(x+2) - (2x-5) = 4x + 11;$
2) $3(x+2) - 5(2-x) = 4(2x-1);$
3) $3(4x-5) - 5(3-x) = 7x - 10;$
4) $4(x+1) - 6(x-1) = 2(5-x);$
5) $5(1+x) - (3x-4) = 2x + 9;$
6) $-8(x-4) + 2(x+4) = 2(x-1) - (x+5);$
7) $5(x+8) - (2x-4) = 3(x+1) - 5(x+3);$
8) $4x - 1 = (2x+5) - (3x-2);$
9) $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} = 13;$
10) $\frac{2x+1}{3} - \frac{x+4}{5} = \frac{1}{2} - \frac{x+1}{4};$
11) $\frac{x-2}{3} + \frac{x+2}{5} = \frac{x-1}{6} + \frac{3x+1}{10};$
12) $\frac{x-3}{6} + \frac{x-1}{4} = \frac{x+6}{3} - \frac{x+7}{8};$
13) $\frac{2x+1}{4} - \frac{x}{3} = \frac{7-x}{12} + x;$

14) $\frac{6x-1}{2}-\frac{x-1}{6}=\frac{1}{3}x-\frac{x-8}{2}$;

15) $\frac{2(x-4)}{7}-\frac{x+8}{14}=\frac{3x-1}{2}+\frac{x+6}{7}$;

16) $\frac{x(x+2)}{x+6}=0$;

17) $\frac{(8-x)(3+x)}{9-x^2}=0$;

18) $(2x-3)(x+5)(7-x)=0$;

19) $\frac{(x-4)(5x+10)}{x+2}=0$;

20) $\frac{(x+2)(4-x)}{16-x^2}=0$.

§ 2. Квадратні рівняння та рівняння, що зводяться до них

1. Квадратні рівняння

Це треба знати!

Рівняння виду $ax^2+bx+c=0$, де a, b, c — дійсні числа, причому $a \neq 0$, називають ***квадратним рівнянням***. Якщо $a=1$, то квадратне рівняння називають ***зведеним***.

Корені рівняння $ax^2+bx+c=0$ знаходять за формулою

$$x=\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Вираз $D=b^2-4ac$ називають ***дискримінантом*** квадратного рівняння. Якщо $D<0$, то квадратне рівняння не має дійсних коренів; якщо $D>0$, то рівняння має два дійсних кореня; якщо $D=0$, то рівняння має один дійсний корінь.

Якщо b — парне число, то корені квадратного рівняння знаходять за формулою

$$x=\frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{D}{4}}}{a}, \text{ де } \frac{D}{4}=\left(\frac{b}{2}\right)^2-ac.$$

Якщо в квадратному рівнянні $b=0$ або $c=0$, то квадратне рівняння називають ***неповним***. Такі рівняння розв'язують методом розкладання його лівої частини на множники.

Теорема Вієта. Якщо зведене квадратне рівняння $x^2+px+q=0$ має дійсні корені, то їх сума дорівнює $-p$, а добуток q, тобто

$$\begin{cases} x_1+x_2=-p, \\ x_1 \cdot x_2=q. \end{cases}$$

Справедлива теорема, обернена до теореми Вієта. Якщо числа x_2 і x_2 такі, що $x_1 + x_2 = -p$, $x_1 \cdot x_2 = q$, то x_1 і x_2 — корені квадратного рівняння $x^2 + px + q = 0$.

Дана теорема дає змогу в ряді випадків знаходити корені квадратного рівняння без використання загальної формули.

Самовчитель

Приклад 1. Розв'язати рівняння $x^2 - 9x + 14 = 0$.

Розв'язання.

Спробуємо знайти два числа x_1 і x_2, такі, що $\begin{cases} x_1 + x_2 = 9, \\ x_1 \cdot x_2 = 14. \end{cases}$

Такими числами є 2 і 7.

Відповідь. 2; 7.

Приклад 2. Розв'язати рівняння:

а) $3x^2 + x = 0$; б) $3x^2 - 9 = 0$.

Розв'язання.

а) $x(3x+1) = 0$;

$$\left[\begin{array}{l} x = 0, \\ 3x + 1 = 0; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = -\dfrac{1}{3}. \end{array}\right. \quad \text{Отже, } x = 0, \text{ або } x = -\frac{1}{3}.$$

Відповідь. $-\frac{1}{3}$; 0.

б) $x^2 - 3 = 0$;

$x^2 - (\sqrt{3})^2 = 0$;

$(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) = 0$;

$$\left[\begin{array}{l} x - \sqrt{3} = 0, \\ x + \sqrt{3} - 0; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = \sqrt{3}, \\ x = -\sqrt{3}. \end{array}\right. \quad \text{Отже, } x = \pm\sqrt{3}.$$

Відповідь. $-\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$.

Приклад 3. Розв'язати рівняння:

а) $2x^2 - x - 3 = 0$; б) $2x^2 - 12x + 14 = 0$; в) $2x^2 - 3x + 5 = 0$.

Розв'язання.

а) $D = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3) = 1 + 24 = 25 > 0$.

Отже, квадратне рівняння має два корені:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{1 + \sqrt{25}}{4} = \frac{1+5}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} = 1{,}5;$$

$$x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \frac{1-\sqrt{25}}{4} = \frac{1-5}{4} = -\frac{4}{4} = -1.$$

Відповідь. -1; $1{,}5$.

б) Ліву і праву частини рівняння поділимо на 2:

$x^2 - 6x + 7 = 0$

$\frac{D}{4} = (-3)^2 - 1\cdot 7 = 9 - 7 = 2 > 0.$

$$x_1 = \frac{-\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{D}{4}}}{a} = 3 + \sqrt{2};$$

$$x_2 = \frac{-\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{D}{4}}}{a} = 3 - \sqrt{2}.$$

Зауваження. Дане рівняння можна розв'язати і за загальною формулою коренів квадратного рівняння.

Відповідь. $3-\sqrt{2}$; $3+\sqrt{2}$.

в) $D = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4\cdot 2\cdot 5 = 9 - 40 = -31 < 0.$

Оскільки $D < 0$, то рівняння не має дійсних коренів.

Відповідь. Коренів немає.

2. Дробові раціональні рівняння

Це треба знати!

Рівняння $f(x) = g(x)$ називається ***раціональним***, якщо $f(x)$ і $g(x)$ — раціональні вирази. При цьому, якщо хоча б один із виразів $f(x)$ і $g(x)$ є дробовим, то раціональне рівняння $f(x) = g(x)$ називається ***дробовим***.

Приклад 1. Розв'язати рівняння

Самовчитель

$$\frac{x-3}{x-5} + \frac{1}{x} = \frac{x+5}{x(x-5)}.$$

Розв'язання.

$$\frac{{}^{x/}x-3}{x-5} + \frac{{}^{x-5/}1}{x} - \frac{{}^{1/}x+5}{x(x-5)} = 0;$$

$$\frac{x(x-3) + x - 5 - (x+5)}{x(x-5)} = 0;$$

$$\frac{x^2 - 3x + x - 5 - x - 5}{x(x-5)} = 0; \quad \frac{x^2 - 3x - 10}{x(x-5)} = 0;$$

$$\begin{cases} x^2 - 3x - 10 = 0, \\ x(x-5) \neq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = -2, \\ x = 5, \end{array}\right. \\ x \neq 0, \\ x \neq 5. \end{cases} \quad \text{Отже, } x = -2.$$

Відповідь. -2.

Приклад 2. Розв'язати рівняння $\dfrac{21}{x+1} = \dfrac{16}{x-2} - \dfrac{6}{x}$.

Розв'язання.

$$\frac{21}{x+1} = \frac{{}^{x/}16}{x-2} - \frac{{}^{x-2/}6}{x};$$

$$\frac{21}{x+1} = \frac{16x - 6(x-2)}{x(x-2)};$$

$$\frac{21}{x+1} = \frac{10x+12}{x(x-2)};$$

$$\begin{cases} 21x(x-2) = (x+1)(10x+12), \\ x \neq -1, \\ x \neq 0, \\ x \neq 2; \end{cases}$$

$21x^2 - 42x = 10x^2 + 22x + 12;\ \ 11x^2 - 64x - 12 = 0;$

$D = (-64)^2 - 4 \cdot 11 \cdot (-12) = 4096 + 528 = 4624;$

$x_1 = \dfrac{64+68}{22} = 6;\ \ x_2 = \dfrac{64-68}{22} = -\dfrac{4}{22} = -\dfrac{2}{11}.$

Відповідь. $-\dfrac{2}{11}$; 6.

Це треба знати!

3. Біквадратні рівняння

Біквадратним називається рівняння виду $ax^4 + bx^2 + c = 0$, де $a \neq 0$. Якщо ввести нову змінну $t = x^2$, то біквадратне рівняння зведеться до квадратного $at^2 + bt + c = 0$.

Самовчитель

Приклад 1. Розв'язати рівняння $x^4 + 4x^2 - 21 = 0$.

Розв'язання.

Нехай $x^2 = t$, тоді $t^2 + 4t - 21 = 0$, тоді $\left[\begin{array}{l} t_1 = -7, \\ t_2 = 3. \end{array}\right.$

Звідси, $\left[\begin{array}{l} x^2=-7, \\ x^2=3. \end{array}\right.$

Перше рівняння сукупності дійсних коренів не має. Із другого рівняння знаходимо $x_1=-\sqrt{3};\ \ x_2=\sqrt{3}.$

Відповідь. $-\sqrt{3};\ \sqrt{3}.$

4. Метод введення нової змінної

Це треба знати!

Цей метод широко використовується під час розв'язування рівнянь.

Самовчитель

Приклад 1. Розв'язати рівняння

$$\left(x^2+2x\right)^2-2\left(x^2+2x\right)-3=0.$$

Розв'язання.

Нехай $x^2+2x=t$, тоді $t^2-2t-3=0$; $\left[\begin{array}{l} t_1=3, \\ t_2=-1. \end{array}\right.$

Тоді, $\left[\begin{array}{l} x^2+2x=3, \\ x^2+2x=-1; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x^2+2x-3=0, \\ x^2+2x+1=0. \end{array}\right.$

Розв'язавши сукупність даних квадратних рівнянь, маємо: $x_1=-3,\ \ x_2=1;\ \ x_3=-1.$

Відповідь. $-3;\ -1;\ 1.$

Приклад 2. Розв'яжіть рівняння $\left(\dfrac{3x-1}{x+2}\right)^2-2\cdot\dfrac{3x-1}{x+2}-3=0.$

Розв'язання.

Нехай $\dfrac{3x-1}{x+2}=t$, тоді $t^2-2t-3=0$; $\left[\begin{array}{l} t_1=3, \\ t_2=-1. \end{array}\right.$

Тоді $\left[\begin{array}{l} \dfrac{3x-1}{x+2}=3, \\ \dfrac{3x-1}{x+2}=-1; \end{array}\right.$

$$\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} 3x-1=3(x+2), \\ 3x-1=-(x+2), \end{array}\right. \\ x\neq-2; \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} 3x-3x=6+1, \\ 3x+x=-2+1, \end{array}\right. \\ x\neq-2; \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} 0x=7 \ \ \text{(рівняння розв'язків не має)}, \\ 4x=-1, \end{array}\right. \\ x\neq-2. \end{array}\right.$$

Отже, $x = -\frac{1}{4}$.

Відповідь. $-\frac{1}{4}$.

Приклад 3. Розв'язати рівняння $x^2 - 3x + \sqrt{x^2 - 3x - 3} = 5$.

Розв'язання.

Нехай $\sqrt{x^2 - 3x - 3} = t \geq 0$,

тоді $x^2 - 3x - 3 = t^2$, $x^2 - 3x = t^2 + 3$.

Звідси маємо: $t^2 + 3 + t = 5$; $t^2 + t - 2 = 0$; тоді $t_1 = -2 < 0$; $t_2 = 1$.

Звідси $\sqrt{x^2 - 3x - 3} = 1$, тоді $x^2 - 3x = 4$; $x^2 - 3x - 4 = 0$;

$$\left[\begin{array}{l} x_1 = 4, \\ x_2 = -1. \end{array}\right.$$

Отже, $x = 4$, $x = -1$.

Відповідь. -1; 4.

Приклад 4. Розв'язати рівняння

$$\frac{2}{x^2 + 2x + 4} + \frac{3}{x^2 + 2x + 2} = \frac{6}{x^2 + 2x + 3}.$$

Розв'язання.

Нехай $x^2 + 2x + 3 = t$,

тоді $x^2 + 2x + 4 = t + 1$, $x^2 + 2x + 2 = t - 1$.

$$\frac{2}{t+1} + \frac{3}{t-1} = \frac{6}{t};$$

$$\frac{2(t-1) + 3(t+1)}{(t+1)(t-1)} = \frac{6}{t}; \quad \frac{5t+1}{t^2 - 1} = \frac{6}{t};$$

$$\begin{cases} t(5t+1) = 6(t^2 - 1), \\ t \neq 0, \\ t \neq 1, \\ t \neq -1; \end{cases} \qquad 5t^2 + t - 6t^2 + 6 = 0; \;\; t^2 - t - 6 = 0;$$

$$\left[\begin{array}{l} t_1 = 3, \\ t_2 = -2. \end{array}\right.$$

Тоді $\left[\begin{array}{l} x^2 + 2x + 3 = 3, \\ x^2 + 2x + 3 = -2; \end{array}\right.$

$$\left[\begin{array}{l} x^2 + 2x = 0, \\ x^2 + 2x + 5 = 0 \text{ (рівняння дійсних коренів не має);} \end{array}\right.$$

Отже, $x^2 + 2x = 0$; $x(x+2) = 0$; $\left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = -2. \end{array}\right.$

Відповідь. -2; 0.

Приклад 5. Розв'язати рівняння $x^2 + 5 - 3\sqrt{2x^2 - 4x + 5} = 2x$.

Розв'язання.

$x^2 - 2x + 5 - 3\sqrt{2(x^2 - 2x) + 5} = 0$.

Нехай $\sqrt{2(x^2 - 2x) + 5} = t \geq 0$; тоді $2(x^2 - 2x) + 5 = t^2$;

звідси $x^2 - 2x = \dfrac{t^2 - 5}{2}$.

Тоді одержимо:

$\dfrac{t^2 - 5}{2} + 5 - 3t = 0$; $t^2 - 5 + 10 - 6t = 0$; $t^2 - 6t + 5 = 0$;

$\left[\begin{array}{l} t_1 = 1, \\ t_2 = 5; \end{array}\right.$ отже, $\left[\begin{array}{l} \sqrt{2(x^2 - 2x) + 5} = 1, \\ \sqrt{2(x^2 - 2x) + 5} = 5; \end{array}\right.$

$$\left[\begin{array}{l} x^2 - 2x = -2, \\ x^2 - 2x = 10; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x^2 - 2x + 2 = 0 \text{ (рівняння дійсних коренів не має),} \\ x^2 - 2x - 10 = 0. \end{array}\right.$$

Розв'яжемо квадратне рівняння $x^2 - 2x - 10 = 0$:

$D = 4 + 40 = 44$.

$x_1 = \dfrac{2 + \sqrt{44}}{2} = \dfrac{2 + 2\sqrt{11}}{2} = 1 + \sqrt{11}$; $x_2 = \dfrac{2 - \sqrt{44}}{2} = 1 - \sqrt{11}$.

Відповідь. $1 - \sqrt{11}$; $1 + \sqrt{11}$.

Приклад 6. Розв'язати рівняння $\left(\dfrac{x}{x+2}\right)^2 + \left(\dfrac{x+2}{x}\right)^2 = \dfrac{82}{9}$.

Розв'язання.

Нехай $\dfrac{x}{x+2} = t$, тоді $\dfrac{x+2}{x} = \dfrac{1}{t}$.

$t^2 + \left(\dfrac{1}{t}\right)^2 = \dfrac{82}{9}$; $t^2 + \dfrac{1}{t^2} = \dfrac{82}{9}$;

$\frac{t^4+1}{t^2}=\frac{82}{9}$; $\begin{cases} 9\left(t^4+1\right)=82t^2, \\ t\neq 0. \end{cases}$

$9t^4-82t^2+9=0$. Нехай $t^2=y$, тоді $9y^2-82y+9=0$.

$D=6724-324=6400$;

$y_1=\frac{82+80}{18}=9$; $y_2=\frac{82-80}{18}=\frac{2}{18}=\frac{1}{9}$.

$$\left[\begin{array}{l} t^2=9, \\ t^2=\frac{1}{9}; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} t=-3, \\ t=3, \\ t=-\frac{1}{3}, \\ t=\frac{1}{3}; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \frac{x}{x+2}=-3, \\ \frac{x}{x+2}=3, \\ \frac{x}{x+2}=-\frac{1}{3}, \\ \frac{x}{x+2}=\frac{1}{3}; \end{array}\right. \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} -4x=6, \\ 2x=-6, \\ 4x=-2, \\ -2x=-2, \end{array}\right. \\ x\neq -2; \end{cases} \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=-\frac{6}{4}=-1{,}5, \\ x=-3, \\ x=-0{,}5, \\ x=1, \end{array}\right. \\ x\neq -2. \end{cases}$$

Відповідь. -3; $-1{,}5$; $-0{,}5$; 1.

Це треба знати!

5. Рівняння виду

$$\frac{ax}{px^2+nx+q}+\frac{bx}{px^2+mx+q}=c$$

Рівняння даного виду діленням чисельника і знаменника кожного дробу на x зводиться до виду $\frac{a}{px+\frac{q}{x}+n}+\frac{b}{px+\frac{q}{x}+m}=c$.

Позначивши $px+\frac{q}{x}=t$, одержимо рівняння $\frac{a}{t+n}+\frac{b}{t+m}=c$, яке зводиться до ***квадратного рівняння***.

Самовчитель

Приклад. Розв'язати рівняння

$$\frac{2x}{2x^2-5x+3}+\frac{13x}{2x^2+x+3}=6.$$

Розв'язання.

$\frac{2}{2x+\frac{3}{x}-5}+\frac{13}{2x+\frac{3}{x}+1}=6$;

Нехай $2x+\frac{3}{x}=y$, тоді $\frac{2}{y-5}+\frac{13}{y+1}=6$;

тоді $\dfrac{2}{y-5}+\dfrac{13}{y+1}=6;$ $\dfrac{2(y+1)+13(y-5)}{(y-5)(y+1)}=6;$

$$\begin{cases}6(y-5)(y+1)=2(y+1)+13(y-5),\\ y\neq 5,\\ y\neq -1;\end{cases}$$

$6\left(y^2-4y-5\right)=15y-63;$

$6y^2-39y+33=0;$

$2y^2-13y+11=0;$

$D=169-88=81.$

$y_1=\dfrac{13+9}{4}=\dfrac{22}{4}=\dfrac{11}{2};$ $y_2=\dfrac{13-9}{4}=\dfrac{4}{4}=1.$

$$\left[\begin{array}{l}2x+\dfrac{3}{x}=\dfrac{11}{12},\\ 2x+\dfrac{3}{x}=1;\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\dfrac{2x^2+3}{x}=\dfrac{11}{2},\\ \dfrac{2x^2+3}{x}=1;\end{array}\right.$$

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}2\left(2x^2+3\right)=11x,\\ 2x^2+3=x,\end{array}\right.\\ x\neq 0;\end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l}4x^2-11x+6=0,\\ 2x^2-x+3=0 \text{ (рівняння дійсних коренів не має).}\end{array}\right.$$

Розв'яжемо квадратне рівняння $4x^2-11x+6=0.$

$D=121-96=25;$

$x_1=\dfrac{11+5}{8}=\dfrac{16}{8}=2;$ $x_2=\dfrac{11-5}{8}=\dfrac{6}{8}=\dfrac{3}{4}.$

Відповідь. $\dfrac{3}{4};$ 2.

6. Рівняння виду $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=m$

Це треба знати!

Рівняння виду $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=m$, якщо виконана умова $a+b=c+d$, зводиться до квадратного.

Приклад. Розв'язати рівняння $(x-1)x(x+1)(x+2)=24.$

Самовчитель

Розв'язання.

$x(x+1)(x-1)(x+2)=24;$

$(x^2+x)(x^2+x-2)=24;$

Нехай $x^2+x=t$, тоді $t(t-2)=24;$ $t^2-2t-24=0;$

$\left[\begin{array}{l} t_1=-4, \\ t_2=6; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x^2+x=-4, \\ x^2+x=6; \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} x^2+x+4=0 \text{ (рівняння дійсних коренів не має)}, \\ x^2+x-6=0. \end{array}\right.$

Розв'яжемо квадратне рівняння $x^2+x-6=0;$ $\left[\begin{array}{l} x_1=2, \\ x_2=-3. \end{array}\right.$

Відповідь. -3; 2.

Це треба знати!

7. Рівняння виду $ax^4+bx^3+cx^2+dx+k=0$

Рівняння виду $ax^4+bx^3+cx^2+dx+k=0$, якщо виконана умова $\frac{k}{a}=\left(\frac{d}{b}\right)^2$, $k\neq 0$, називається ***зворотнім***.

Самовчитель

Приклад. Розв'язати рівняння $2x^4-21x^3+74x^2-105x+50=0.$

Розв'язання.

Оскільки $x=0$ не є розв'язком даного рівняння, то можна поділити обидві частини рівняння на x^2:

$$2x^2-21x+74-\frac{105}{x}+\frac{50}{x^2}=0;$$

$$2\left(x^2+\frac{25}{x^2}\right)-21\left(x+\frac{5}{x}\right)+74=0.$$

Нехай $x+\frac{5}{x}=t$, тоді $x^2+\frac{25}{x^2}=t^2-10;$

$2(t^2-10)-21t+74=0;$

$2t^2-21t+54=0;$ $D=(-21)^2-4\cdot 2\cdot 54=441-432=9;$

$$t_1=\frac{21+3}{4}=\frac{24}{4}=6; \quad t_2=\frac{21-3}{4}=\frac{18}{4}=\frac{9}{2},$$

$$\left[\begin{array}{l} x+\dfrac{5}{x}=6, \\ x+\dfrac{5}{x}=\dfrac{9}{2}; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \dfrac{x^2+5}{x}=6, \\ \dfrac{x^2+5}{x}=\dfrac{9}{2}; \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x^2+5=6x, \\ 2(x^2+5)=9x, \end{array}\right. \\ x\neq 0; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x^2-6x+5=0, \\ 2x^2-9x+10=0. \end{array}\right.$$

Розв'яжемо утворені рівняння:

1) $x^2-6x+5=0;\quad x_1=5;\quad x_2=1.$

2) $2x^2-9x+10=0,\quad D=81-80=1;$

$$x_3=\frac{9+1}{4}=\frac{10}{4}=\frac{5}{2};\quad x_4=\frac{9-1}{4}=2.$$

Відповідь. 1; 2; 2,5; 5.

Вправи для самостійного розв'язування

Перевір себе

Розв'язати рівняння:

1) $6x^2-7x=0;$ 2) $3x-x^2=0;$

3) $9x^2+1=0;$ 4) $16x^2-2=0;$

5) $x^2+2x+3=0;$ 6) $9x^2-24x+16=0;$

7) $4(x+3)-\dfrac{5}{x-1}=x+15+\dfrac{5}{1-x};$

8) $4x(10x-3)-5x(8x-3)=4x-3(x+8);$

9) $(2x+1)^2+(x-3)^2-(2x+3)(2x-3)-19=0;$

10) $(4x-1)^2-(5x+4)^2+(2x-7)(2x+7)+8(x+8)=0;$

11) $\dfrac{x^2-5}{4}-\dfrac{x^2+1}{5}=\dfrac{7}{20};$

12) $\dfrac{4x^2+3}{5}+\dfrac{4-5x^2}{6}=\dfrac{13}{30};$

13) $\dfrac{(x-3)^2}{4}-\dfrac{(3+2x)^2}{9}=\dfrac{3-34x}{12}+1;$

14) $(4x-3)^2-(5x+2)^2+\dfrac{6}{x+5}=5+x+\dfrac{6}{5+x};$

15) $\dfrac{(x-3)^2}{4}+\dfrac{(x+1)^2}{6}-\dfrac{(x-1)(x+1)}{3}=0;$

16) $\dfrac{x(x-5)}{4}-\dfrac{x(x-4)}{5}-\dfrac{4}{x-5}=\dfrac{4}{5-x}-1;$

17) $(4x+5)(5x-9)-(4x-1)^2-x(4-x)=44;$

18) $(5x+3)(6x-1)-(5x-1)^2-x(4-x)=-7;$

19) $\dfrac{(3x-2)^2}{4}-\dfrac{(4x-3)(3x-1)}{5}=\dfrac{x(x+3)}{10}-2;$

20) $\dfrac{2x-3}{x+2}+\dfrac{2x-1}{x-2}=\dfrac{7x-2}{x^2-4};$

21) $\dfrac{x+1}{2x-1}-\dfrac{3-x}{3x+1}=2;$

22) $\dfrac{3x}{x-2}+\dfrac{2x}{x+1}=\dfrac{8x+18}{(x-2)(x+1)};$

23) $\dfrac{3}{x+3}+\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{2}{x^2-9}=0;$

24) $\dfrac{3x-x^2}{2}+\dfrac{(3x-7)^2}{4}=7-2x;$

25) $(3x^2-5x)^2-(5x-3)^2=0;$

26) $(3x^2-5x-2)^2-(x^2+x-6)^2=0;$

27) $x^4-(5x+6)^2=0;$

28) $4x^4-(5x+3)^2=0;$

29) $\left(\dfrac{x-1}{x+2}\right)^2-2\dfrac{x-1}{x+2}-3=0;$

30) $\left(\dfrac{2x+1}{x-3}\right)^2-3\dfrac{2x+1}{x-3}+2=0;$

31) $\left(\dfrac{x^2+6}{x}\right)^2+12\dfrac{x^2+6}{x}+35=0;$

32) $(x^2-3x)^2-2(x^2-3x)-8=0;$

33) $(x^2+3x-5)^2-4(x^2+3x-5)-5=0;$

34) $3x^8+5x^4-8=0;$

35) $x^4+3x^2-4=0;$

36) $(x^2-x-1)(x^2-x)=30;$

37) $(x^2+2x)^2-3(x+1)^2-37=0;$

38) $(x-2)(x-1)(x+1)(x+2)=40;$

39) $x^4 - x^3 - 5x^2 - x - 6 = 0$;

40) $x(x-1)(x-2)(x-3) = 15$.

§ 3. Ірраціональні рівняння

Це треба знати!

Рівняння, у яких змінна знаходиться під знаком кореня, називаються *ірраціональними*. Для розв'язування такі рівняння найчастіше зводять до раціонального рівняння за допомогою таких перетворень:

— заміна змінних;

— піднесення обох частин рівняння до одного степеня. При цьому треба пам'ятати, що при піднесенні обох частин рівняння до непарного степеня одержуємо рівняння, рівносильне заданому. При піднесенні обох частин рівняння до парного степеня можуть з'явитися сторонні корені, які відсіюються перевіркою.

У деяких випадках при розв'язуванні рівнянь, що містять корені парних степенів, доцільніше відсіювати сторонні корені не перевіркою, а знаходженням області допустимих значень змінної.

Самовчитель

Приклад 1. Розв'язати рівняння
$\sqrt{x+1} - \sqrt{9-2x} = \sqrt{2x-12}$.

Розв'язання.

Знайдемо область допустимих значень змінної:

$$\begin{cases} x+1 \ge 0, \\ 9-2x \ge 0, \\ 2x-12 \ge 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x \ge -1, \\ -2x \ge -9, \\ 2x \ge 12; \end{cases} \quad \begin{cases} x \ge -1, \\ x \le 4{,}5, \\ x \ge 6; \end{cases} \quad \begin{cases} x \ge 6, \\ x \le 4{,}5. \end{cases}$$

Оскільки дана система нерівностей не має розв'язків, то область допустимих значень змінної — порожня множина.

Відповідь. Рівняння розв'язків не має.

Приклад 2. Розв'язати рівняння $\sqrt{3x-2} + x = 4$.

Розв'язання.

$\sqrt{3x-2} = 4 - x$;

$\left(\sqrt{3x-2}\right)^2 = (4-x)^2$;

$3x - 2 = 16 - 8x + x^2$;

$x^2 - 8x - 3x + 16 + 2 = 0$;

$x^2 - 11x + 18 = 0;$

$\left[\begin{array}{l} x_1 = 2, \\ x_2 = 9. \end{array}\right.$

Перевірка

1) $\sqrt{3 \cdot 2 - 2} + 2 = 4;$ $\sqrt{4} + 2 = 4;$ $2 + 2 = 4;$ $4 = 4.$

2) $\sqrt{3 \cdot 9 - 2} + 9 \neq 4;$ $\sqrt{25} + 9 \neq 4;$ $5 + 9 \neq 4;$ $14 \neq 4.$

Отже, $x = 9$ не є коренем рівняння.

Відповідь. 2.

Приклад 3. Розв'язати рівняння $\sqrt{3x+1} + \sqrt{4x-3} = \sqrt{5x+4}.$

Розв'язання.

$\left(\sqrt{3x+1} + \sqrt{4x-3}\right)^2 = \left(\sqrt{5x+4}\right)^2;$

$3x + 1 + 2\sqrt{(3x+1)(4x-3)} + 4x - 3 = 5x + 4;$

$2\sqrt{(3x+1)(4x-3)} = 5x + 4 - 3x - 4x + 2;$

$2\sqrt{(3x+1)(4x-3)} = 6 - 2x;$

$\sqrt{(3x+1)(4x-3)} = 3 - x;$

$\left(\sqrt{(3x+1)(4x-3)}\right)^2 = (3 - x)^2;$

$(3x+1)(4x-3) = 9 - 6x + x^2;$

$12x^2 - 5x - 3 = 9 - 6x + x^2;$

$12x^2 - x^2 - 5x + 6x - 3 - 9 = 0;$

$11x^2 + x - 12 = 0;$

$D = 1 + 528 = 529;$

$x_1 = \frac{-1+23}{22} = \frac{22}{22} = 1;$ $x_2 = \frac{-1-23}{22} = \frac{-24}{22} = -\frac{12}{11};$

Перевірка:

1) $\sqrt{3 \cdot 1 + 1} + \sqrt{4 \cdot 1 - 3} = \sqrt{5 \cdot 1 + 4};$ $\sqrt{4} + \sqrt{1} = \sqrt{9};$ $2 + 1 = 3;$ $3 = 3.$

2) $\sqrt{3 \cdot \left(-\frac{12}{11}\right) + 1} + \sqrt{4\left(-\frac{12}{11}\right) - 3} = \sqrt{5 \cdot \left(-\frac{12}{11}\right) + 4}.$

Оскільки вираз $\sqrt{4 \cdot \left(-\frac{12}{11}\right) - 3}$ не має смислу (підкореневий вираз від'ємний), то $x = -\frac{12}{11}$ не є коренем рівняння.

Відповідь. 1.

Приклад 4. Розв'язати рівняння $\sqrt[3]{8x+4}-\sqrt[3]{8x-4}=2$.

$\left(\sqrt[3]{8x+4}-\sqrt[3]{8x-4}\right)^3=2^3$;

$8x+4-3\sqrt[3]{(8x+4)^2}\cdot\sqrt[3]{8x-4}+3\sqrt[3]{8x+4}\cdot\sqrt[3]{(8x-4)^2}-(8x-4)=8$;

$\cancel{8x}+4-\cancel{8x}+4-3\sqrt[3]{8x+4}\cdot\sqrt[3]{8x-4}\left(\sqrt[3]{8x+4}-\sqrt[3]{8x-4}\right)=8$;

$8-3\sqrt[3]{(8x+4)(8x-4)}\cdot 2=8$;

$-6\sqrt[3]{64x^2-16}=0$;

$\sqrt[3]{64x^2-16}=0$; $64x^2-16=0$; $64x^2=16$;

$x^2=\frac{16}{64}=\frac{1}{4}$; $x_1=\frac{1}{2}$; $x_2=-\frac{1}{2}$.

Відповідь. $-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$.

Приклад 5. Розв'язати рівняння $\frac{8}{\sqrt{6-x}}-\sqrt{6-x}=2$.

Розв'язання.

Нехай $\sqrt{6-x}=t>0$, тоді $\frac{8}{t}-t=2$; $\frac{8-t^2}{t}=2$;

$8-t^2=2t$; $t^2+2t-8=0$; $t_1=2$; $t_2=-4<0$.

Отже, $\sqrt{6-x}=2$; $6-x=4$; $x=2$.

Відповідь. 2.

Приклад 6. Розв'язати рівняння $\sqrt[3]{x-2}+\sqrt{x+1}=3$.

Розв'язання.

Нехай $\begin{cases}\sqrt[3]{x-2}=u,\\ \sqrt{x+1}=v,\end{cases}$ тоді $\begin{cases}x-2=u^3,\\ x+1=v^2.\end{cases}$

Одержуємо систему $\begin{cases}u+v=3,\\ u^3-v^2=-3.\end{cases}$

Із першого рівняння: $v=3-u$, тоді

$u^3-(3-u)^2=-3$;

$u^3-(9-6u+u^2)=-3$;

$u^3-u^2+6u-6=0$;

$u^2(u-1)+6(u-1)=0$;

$(u-1)(u^2+6)=0$;

$$\left[\begin{array}{l} u-1=0, \\ u^2+6=0 \text{ (рівняння розв'язку не має).} \end{array}\right.$$

Тоді $u=1$, $v=3-1=2$. Отже, $\begin{cases} \sqrt[3]{x-2}=1, \\ \sqrt{x+1}=2; \end{cases}$ $\begin{cases} x-2=1, \\ x+1=4; \end{cases}$ $x=3$.

Відповідь. 3.

Перевір себе

Вправи для самостійного розв'язування

Розв'язати рівняння:

1) $\sqrt{x}=x-6$;

2) $\sqrt{4x^2-5x-2}=-x$;

3) $x-\sqrt{x+1}=5$;

4) $\sqrt{x+78}-x=6$;

5) $\sqrt{x+2}+\sqrt{3x-2}=4$;

6) $\sqrt{x+8}-\sqrt{2x-1}=2$;

7) $\dfrac{8}{\sqrt{6-x}}-\sqrt{6-x}=2$;

8) $\sqrt{x-3}+\sqrt{x+5}=4$;

9) $\sqrt{\dfrac{3-x}{x+1}}+\sqrt{\dfrac{x+1}{3-x}}=4\dfrac{1}{4}$;

10) $\sqrt[3]{x}-3\sqrt[6]{x}=10$;

11) $x^2-3x-6\sqrt{x^2-3x}+8=0$;

12) $(x^2-16)\cdot\sqrt{3-x}=0$;

13) $\sqrt[3]{9-\sqrt{x+5}}=1$;

14) $\sqrt{3x^2+6x+1}=7-x$;

15) $\sqrt{4+x}\cdot\sqrt{5-x}=2\sqrt{2}$;

16) $x-\sqrt{x+2}=4$;

17) $\sqrt[3]{x+3}-\sqrt[3]{x-16}=1$;

18) $\sqrt{-8x}=\sqrt{x^2-9}$;

19) $x^2+x-2\sqrt{x^2+x-3}=6$;

20) $\sqrt{3x+4}-\dfrac{4}{\sqrt{3x+4}}=3$.

§ 4. Показникові рівняння

Це треба знати!

1. Найпростіші показникові рівняння

Рівняння виду $a^x=b$, де $a>b$, $b>0$, $a\neq 1$ називаються ***найпростішими показниковими рівняннями***.

$x=\log_a b$ — розв'язок найпростішого показникового рівняння $a^x=b$.

Показникові рівняння виду $a^{f(x)} = a^{g(x)}$, де $a > 0$, $a \neq 1$, рівносильні рівнянню $f(x) = g(x)$.

Самовчитель

Приклад. Розв'язати рівняння:

а) $5^{4x} = 7$; б) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} = 8$;

в) $\sqrt[7]{9^{3x-1}} = \frac{3}{\sqrt[4]{3}}$; г) $(6,3)^{x^2+2x} = 1$; д) $9^{8x-3} = 0$;

е) $\left(\frac{3}{5}\right)^{x} = \left(\frac{5}{3}\right)^{2}$; є) $6^{2x+4} = 3^{3x} \cdot 2^{x+8}$.

Розв'язання.

а) $4x = \log_5 7$; $x = \frac{1}{4}\log_5 7$.

Відповідь. $\frac{1}{4}\log_5 7$.

б) $2^{-(x+1)} = 2^3$;

$-(x+1) = 3$; $-x - 1 = 3$; $-x = 4$; $x = -4$;

Відповідь. -4.

в) $9^{\frac{3x-1}{7}} = 3^{1-\frac{1}{4}}$; $3^{\frac{2(3x-1)}{7}} = 3^{\frac{3}{4}}$;

$\frac{2(3x-1)}{7} = \frac{3}{4}$; $8(3x-1) = 21$; $24x - 8 = 21$; $24x = 29$;

$x = \frac{29}{24} = 1\frac{5}{24}$.

Відповідь. $1\frac{5}{24}$.

г) $(6,3)^{x^2+2x} = (6,3)^0$;

$x^2 + 2x = 0$; $x(x+2) = 0$;

$\left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x + 2 = 0; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = -2. \end{array}\right.$

Відповідь. -2; 0.

д) рівняння розв'язку не має, оскільки показникова функція не може дорівнювати нулю.

е) $\left(\frac{3}{5}\right)^{x} = \left(\frac{3}{5}\right)^{-2}$; $x = -2$.

Відповідь. -2.

е) $(3\cdot 2)^{2x+4} = 3^{3x}\cdot 2^{x+8}$; $3^{2x+4}\cdot 2^{2x+4} = 3^{3x}\cdot 2^{x+8}$;

$\frac{3^{2x+4}}{3^{3x}} = \frac{2^{x+8}}{2^{2x+4}}$; $3^{2x+4-3x} = 2^{x+8-2x-4}$;

$3^{4-x} = 2^{4-x}$; $\frac{3^{4-x}}{2^{4-x}} = 1$;

$\left(\frac{3}{2}\right)^{4-x} = \left(\frac{3}{2}\right)^{0}$; $4 - x = 0$; $x = 4$.

Відповідь. 4.

Це треба знати!

2. Показникові рівняння, у лівій частині яких є сума степенів з однаковою основою і показниками, які відрізняються на стале число

Рівняння такого виду зводяться до найпростішого винесенням у лівій частині за дужки степеня з певним показником.

Самовчитель

Приклад 1. Розв'язати рівняння $2^{x-4} + 2^{x-5} - 2^{x-7} = 704$.

Розв'язання.

$2^{x-7}\left(2^3 + 2^2 - 1\right) = 704$;

$2^{x-7}\cdot 11 = 704$;

$2^{x-7} = 704 : 11$;

$2^{x-7} = 64$; $2^{x-7} = 2^6$; $x - 7 = 6$; $x = 13$.

Відповідь. 13.

Приклад 2. Розв'язати рівняння $5^{x+2} - 3^{x+2} = 5^{x+1} + 3^{x+1}$.

Розв'язання.

$5^{x+2} - 5^{x+1} = 3^{x+1} + 3^{x+2}$;

$5^{x+1}(5 - 1) = 3^{x+1}(1 + 3)$;

$4\cdot 5^{x+1} = 3^{x+1}\cdot 4$; $5^{x+1} = 3^{x+1}$;

$\left(\frac{5}{3}\right)^{x+1} = 1$; $\left(\frac{5}{3}\right)^{x+1} = \left(\frac{5}{3}\right)^{0}$;

$x + 1 = 0$; $x = -1$.

Відповідь. −1.

3. Показникові рівняння, що зводяться до квадратних відносно показникової функції

Це треба знати!

Самовчитель

Приклад 1. Розв'язати рівняння

$4^x + 2^{x+1} - 24 = 0.$

Розв'язання.

$2^{2x} + 2^x \cdot 2 - 24 = 0;$

Нехай $2^x = t > 0$, тоді $t^2 + 2t - 24 = 0;$

$$\left[\begin{array}{l} t_1 = 4, \\ t_2 = -6 < 0. \end{array}\right.$$

Отже, $2^x = 4$, тоді $2^x = 2^2$; $x = 2$.

Відповідь. 2.

Приклад 2. Розв'язати рівняння $27^{\frac{2}{x}} - 3^{\frac{3x+3}{x}} + 162 = 0.$

Розв'язання.

$$\left(27^{\frac{1}{x}}\right)^2 - 3^{\frac{3(x+1)}{x}} + 162 = 0;$$

$$\left(27^{\frac{1}{x}}\right)^2 - 27^{1+\frac{1}{x}} + 162 = 0;$$

$$\left(27^{\frac{1}{x}}\right)^2 - 27 \cdot 27^{\frac{1}{x}} + 162 = 0;$$

Нехай $27^{\frac{1}{x}} = t > 0$, тоді $t^2 - 27t + 162 = 0$; $D = 729 - 648 = 81;$

$$t_1 = \frac{27+9}{2} = \frac{36}{2} = 18; \quad t_2 = \frac{27-9}{2} = \frac{18}{2} = 9.$$

$$\left[\begin{array}{l} 27^{\frac{1}{x}} = 18, \\ 27^{\frac{1}{x}} = 9; \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} \frac{1}{x} = \log_{27} 18, \\ 3^{\frac{3}{x}} = 3^2; \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{\log_{27} 18} = \log_{18} 27, \\ x = \frac{3}{2} = 1{,}5. \end{array}\right.$$

Відповідь. 1,5; $\log_{18} 27$.

4. Однорідні показникові рівняння

Це треба знати!

Рівняння виду $a_1 \cdot a^{2x} + a_2 \cdot a^x \cdot b^x + a_3 \cdot b^{2x} = 0$ називається ***однорідним показниковим рівнянням.*** Для розв'язання такого рівняння треба ліву й праву частини рівняння поділити на a^{2x} або на b^{2x}.

Самовчитель

Приклад. Розв'язати рівняння
$4^x - 14^x \cdot 2 = 3 \cdot 49^x$.

Розв'язання.

$$\frac{4^x}{49^x} - 2 \cdot \frac{14^x}{49^x} = 3; \quad \left(\frac{2}{7}\right)^{2x} - 2 \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^x = 3.$$

Нехай $\left(\frac{2}{7}\right)^x = t > 0$, тоді $t^2 - 2t - 3 = 0$; $\left[\begin{array}{l} t_1 = -1 < 0, \\ t_2 = 3. \end{array}\right.$

Отже, $\left(\frac{2}{7}\right)^x = 3$, тоді $x = \log_{\frac{2}{7}} 3$.

Відповідь. $\log_{\frac{2}{7}} 3$.

Перевір себе

Вправи для самостійного розв'язування

Розв'язати рівняння:

1) $\left(\frac{3}{4}\right)^x = 8$;
2) $\left(\frac{3}{4}\right)^x = \frac{16}{9}$;
3) $\left(\frac{4}{7}\right)^{2-3x} = \left(\frac{49}{16}\right)^{-2}$;
4) $(7,2)^{x^2+2x} = 1$;
5) $(0,6)^{5+3x} = \frac{125}{27}$;
6) $\left(\frac{16}{25}\right)^x \cdot \left(\frac{125}{64}\right)^{x-1} = \frac{4}{5}$;
7) $\left(\frac{3}{7}\right)^{2x+5} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{2x+5} = 1$;
8) $\sqrt[7]{9^{3x-1}} = \frac{3}{\sqrt[4]{3}}$;
9) $4 \cdot 9^x - 7 \cdot 12^x + 3 \cdot 16^x = 0$;
10) $7^x - 2^{x+2} = 5 \cdot 7^{x-1} - 2^{x-1}$;
11) $3^{2x+1} - 2 \cdot 15^x - 5^{2x+1} = 0$;
12) $6 \cdot 3^{x+1} - 5 \cdot 3^x = 39$;
13) $4^{x-3} - 3 \cdot 4^{x-4} + 2 \cdot 4^{x-5} = 96$;
14) $7^{x-1} - 5^x - 3 \cdot 5^{x-1} + 7^x = 0$;
15) $9^x - 12 \cdot 3^x + 27 = 0$;
16) $7^{2x-3} = 7^{x-2} + 6$;
17) $2^{x+1} - 3 \cdot 4^{x-2} = 5$;
18) $3^x + 5 \cdot 3^{2-x} = 14$;
19) $(x-3)^{x^2-3x} = (x-3)^{2x-4}$;
20) $(2x-1)^{2x^2-2x-6} - (2x-1)^{x^2+9} = 0$;
21) $3 \cdot 4^x + 2 \cdot 9^x = 5 \cdot 6^x$;
22) $9^{\frac{1}{x}} + 6^{\frac{1}{x}} = 4^{\frac{1}{x}}$;
23) $3 \cdot 16^x + 2 \cdot 81^x = 5 \cdot 36^x$;
24) $5^x + \frac{125}{5^x} = 30$;
25) $3^{4\sqrt{x}} - 4 \cdot 3^{\sqrt{4x}} + 3 = 0$.

§ 5. Логарифмічні рівняння

Це треба знати!

1. Найпростіші логарифмічні рівняння

Найпростішими логарифмічними рівняннями є рівняння $\log_a x = b$, де $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$.

$x = a^b$ — розв'язок даного рівняння.

Самовчитель

Приклад. Розв'язати рівняння:

а) $\log_{\frac{1}{3}}(2x+1) = -1$;

б) $\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2+3x+10\right) = -3$;

в) $\log_x 9 = 2$; г) $\log_{x-2}\left(2x^2+x+8\right) = 2$.

Розв'язання.

а) $2x+1>0$; $2x>-1$;

$x > -\frac{1}{2}$ — область допустимих значень змінної x.

$2x+1 = \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$; $2x+1=3$; $2x = 3-1$;

$2x = 2$; $x = 1 > -\frac{1}{2}$.

Відповідь. 1.

б) $x^2+3x+10>0$.

Графіком функції $y = x^2+3x+10$ є парабола, вітки якої напрямлені вгору.

$x^2+3x+10=0$;

$D = 3^2 - 4\cdot 1\cdot 10 = 9-40<0$.

Отже, $x^2+3x+10>0$ при будь-якому x.

Тоді $x^2+3x+10 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$;

$x^2+3x+10 = 8$; $x^2+3x+2=0$; $x_1=-2$; $x_2=-1$.

Відповідь. −2; −1.

в) ОДЗ: $x>0$, $x \neq 1$.

$9 = x^2$;

$x_1 = -3 < 0$; $x_2 = 3$.

Відповідь. 3.

г) ОДЗ: $\begin{cases} x-2>0, \\ x-2\neq -1, \\ 2x^2+x+8>0; \end{cases}$ $\begin{cases} x>2, \\ x\neq 3, \\ x - \text{будь-яке}; \end{cases}$

ОДЗ: $x \in (2;3) \cup (3;\infty)$.

$2x^2+x+8=(x-2)^2$; $2x^2+x+8=x^2-4x+4$;

$x^2+5x+4=0$;

$x_1=-4$; $x_2=-1$.

Оскільки дані корені не попадають в ОДЗ, то рівняння розв'язків не має.

Відповідь. Рівняння коренів не має.

Це треба знати!

2. Рівняння, які розв'язуються за допомогою властивостей логарифма і потенціюванням

$\log_a f(x) = \log_a g(x)$, $a>0$, $a\neq 1$.

Дане рівняння еквівалентне системі:

$$\begin{cases} f(x)=g(x), \\ f(x)>0, \\ g(x)>0. \end{cases}$$

Самовчитель

Приклад 1. Розв'язати рівняння $\log_2(x-1)+\log_2(3x-2)=2$.

Розв'язання.

$\log_2(x-1)(3x-2)=2$;

$$\begin{cases} (x-1)(3x-2)=4, \\ x-1>0, \\ 3x-2>0; \end{cases} \quad \begin{cases} 3x^2-5x+2-4=0, \\ x>1, \\ x>\dfrac{2}{3}; \end{cases} \quad \begin{cases} 3x^2-5x-2=0, \\ x>1; \end{cases}$$

$D=25+24=49$;

$$x_1=\frac{5+7}{6}=2;\quad x_2=\frac{5-7}{6}=-\frac{2}{6}=-\frac{1}{3}<1.$$

Відповідь. 2.

Приклад 2. Розв'язати рівняння $\lg 2+\frac{1}{2}\lg(x-4)=\lg\sqrt{x+5}$.

Розв'язання.

$\lg 2+\lg\sqrt{x-4}=\lg\sqrt{x+5}$;

$\lg 2\sqrt{x-4} = \lg \sqrt{x+5};$

$\begin{cases} 2\sqrt{x-4} = \sqrt{x+5}, \\ x-4>0, \\ x+5>0; \end{cases}$ $\begin{cases} 4(x-4) = x+5, \\ x>4; \end{cases}$

$\begin{cases} 4x-16 = x+5, \\ x>4; \end{cases}$ $\begin{cases} 3x = 21, \\ x>4; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 7, \\ x>4. \end{cases}$

Відповідь. 7.

3. Логарифмічні рівняння, які розв'язуються методом заміни змінної

Це треба знати!

Самовчитель

Приклад. Розв'язати рівняння

$2\log_3^2 x + 3\log_3 \frac{1}{x} - 2 = 0.$

Розв'язання.

ОДЗ: $x > 0$.

$2\log_3^2 x - 3\log_3 x - 2 = 0.$

Нехай $\log_3 x = t$, тоді $2t^2 - 3t - 2 = 0;$

$D = 9 + 16 = 25;$

$t_1 = \frac{3+5}{4} = 2,\ t_2 = \frac{3-5}{4} = -\frac{1}{2}.$

$\left[\begin{array}{l} \log_3 x = 2, \\ \log_3 x = -\frac{1}{2}; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x = 3^2 = 9, \\ x = 3^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}. \end{array}\right.$

Відповідь. $\frac{1}{\sqrt{3}}$; 9.

4. Логарифмічні рівняння, які розв'язуються за допомогою формули переходу до нової основи

Це треба знати!

Самовчитель

Приклад. Розв'язати рівняння

$3\log_3(4x-1) + \log_{(4x-1)} 3 = 4.$

Розв'язання.

$\log_{(4x-1)} 3 = \frac{1}{\log_3(4x-1)}.$

Нехай $\log_3(4x-1)=t$, тоді $3t+\frac{1}{t}=4$; $\frac{3t^2+1}{t}=4$;

$$\begin{cases}3t^2+1=4t,\\ t\neq 0;\end{cases}$$

$3t^2-4t+1=0$;

$D=16-12=4$.

$t_1=\frac{4+2}{6}=1$; $t_2=\frac{4-2}{6}=\frac{1}{3}$.

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\log_3(4x-1)=1,\\ \log_3(4x-1)=\frac{1}{3},\end{array}\right.\\ 4x-1>0,\\ 4x-1\neq 1;\end{cases}\quad \begin{cases}\left[\begin{array}{l}4x-1=3,\\ 4x-1=3^{\frac{1}{3}},\end{array}\right.\\ x>\frac{1}{4},\\ x\neq\frac{1}{2};\end{cases}\quad \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=1,\\ x=\frac{\sqrt[3]{3}+1}{4},\end{array}\right.\\ x>\frac{1}{4},\\ x\neq\frac{1}{2}.\end{cases}$$

Отже, $x=1$, $x=\frac{\sqrt[3]{3}+1}{4}$.

Відповідь. 1; $\frac{\sqrt[3]{3}+1}{4}$.

Це треба знати!

5. Рівняння, які містять змінну в основі і показнику степеня

Такі рівняння розв'язуються логарифмуванням обох частин за основою a.

Самовчитель

Приклад. Розв'язати рівняння

$$x^{\log_3 x}=\frac{x^3}{9}.$$

Розв'язання.

Прологарифмуємо рівняння за основою 3:

$\log_3 x^{\log_3 x}=\log_3\frac{x^3}{9}$;

$\log_3 x\cdot\log_3 x=\log_3 x^3-\log_3 9$;

$\log_3^2 x-3\log_3 x+2=0$.

Нехай $\log_3 x=t$, тоді

$t^2-3t+2=0$;

$t_1=2$; $t_2=1$.

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \log_3 x = 2, \\ \log_3 x = 1, \end{array}\right. \\ x > 0, \\ x \neq 1; \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{l} x = 3^2 = 9, \\ x = 3. \end{array}\right.$$

Відповідь. 3; 9.

Вправи для самостійного розв'язування

Перевір себе

Розв'язати рівняння:

1) $\log_{\frac{1}{3}}(2x+1) = -1;$
2) $\log_3\left(\dfrac{2x+1}{x-3}\right) = 1;$
3) $\log_2\left(x^2 - 2x - 1\right) = 1;$
4) $\log_{\frac{1}{2}}\left(x_2 + 3x + 10\right) = -3;$
5) $x^{\log_2 x + 2} = 256;$
6) $x^{\lg x - 3} = 10000;$
7) $\log_2^2(4x) + \log_2 \dfrac{x^2}{8} = 8;$
8) $\log_{(1-x)} 25 = 2;$
9) $\log_{\sqrt{4-x}} 3 - 2 = 0;$
10) $\log_{\frac{3x-2}{x+1}} 5 - 1 = 0;$
11) $\log_6(x+4) + \log_6(x-1) = 1;$
12) $\log_{0,7}(3-x) = \log_{0,7} 3 - \log_{0,7}\left(\dfrac{3x}{2}\right);$
13) $\lg\left(x^3+1\right) - 0,25\lg\left(x^2+2x+1\right)^2 = \lg 3;$
14) $\lg(x-4) + 2\lg\sqrt{2x-1} = \lg 9;$
15) $\log_3\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right) + 1 = \log_3\left(\dfrac{2x-1}{2x-5}\right);$
16) $\log_2^2 x - 2\log_2 x^3 + 5 = 0;$
17) $\log_5^2 x - \log_5 x^3 - 4 = 0;$
18) $\log_2^2 x^2 - 4\log_2 x^2 + \log_2 8 = 0;$
19) $\lg^2(0,1x) - \lg\left(\dfrac{0,1}{x}\right) = 4;$
20) $\log_x^2 \sqrt{5} - \log_x 5\sqrt{5} + \dfrac{5}{4} = 0;$
21) $\log_{(x+2)}^2 16 - 4\log_{x+2} 2 = 2;$
22) $\log_{81} x + \dfrac{1}{2}\log_9(x-6) = \dfrac{3}{4};$

23) $x^{1-\log_2 x} = \frac{1}{64}$;

24) $x^{\lg x-2} = 10^{2\lg x-3}$;

25) $(x^2 - 2x - 7)^{x^2-9} = 1$.

§ 6. Тригонометричні рівняння

Це треба знати!

1. Найпростіші тригонометричні рівняння

До найпростіших тригонометричних рівнянь належать рівняння $\cos x = a$, $\sin x = a$, $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{ctg} x = a$.

Розв'язки рівняння $\cos x = a$, де $-1 \le a \le 1$, знаходять за формулою $x = \pm\arccos a + 2\pi n$, $n \in Z$; $\arccos(-a) = \pi - \arccos a$.

Окремі випадки розв'язування рівняння $\cos x = a$:

1) якщо $\cos x = 0$, тоді $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$;

2) якщо $\cos x = 1$, тоді $x = 2\pi n$, $n \in Z$;

3) якщо $\cos x = -1$, тоді $x = \pi + 2\pi n$, $n \in Z$.

Якщо $|a| > 1$, тоді рівняння $\cos x = a$ коренів не має.

Розв'язки рівняння $\sin x = a$, де $-1 \le a \le 1$, знаходять за формулою $x = (-1)^n \arcsin \alpha + \pi n$, $n \in Z$,

$\arcsin(-a) = -\arcsin a$.

Окремі випадки розв'язування рівняння $\sin x = a$:

1) якщо $\sin x = 0$, тоді $x = \pi n$, $n \in Z$;

2) якщо $\sin x = 1$, тоді $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$;

3) якщо $\sin x = -1$, тоді $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$.

Якщо $|a| > 1$, тоді рівняння $\sin x = a$ коренів не має.

Розв'язки рівняння $\operatorname{tg} x = a$, a — будь-яке, знаходять за формулою $x = \operatorname{arctg} a + \pi n$, $n \in Z$.

$\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a$.

Якщо $\operatorname{tg} x = 0$, тоді $x = \pi n$, $n \in Z$.

Розв'язки рівняння $\operatorname{ctg} x = a$, a — будь-яке, знаходять за формулою $x = \operatorname{arcctg} a + \pi n$, $n \in Z$.

$\operatorname{arcctg}(-a) = \pi - \operatorname{arcctg} a$.

Якщо $\operatorname{ctg} x = 0$, тоді $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$.

Приклад 1. Розв'язати рівняння:

а) $\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)=-\dfrac{1}{2}$;

б) $2\cos\left(\dfrac{x}{4}-\dfrac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{2}$; в) $\mathrm{tg}\,\dfrac{x}{2}=-1$;

г) $\mathrm{ctg}\,\dfrac{x}{2}=-3$; д) $\sin\left(\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{x}{2}\right)=1{,}2$.

Розв'язання.

а) $2x+\dfrac{\pi}{4}=(-1)^n\arcsin\left(-\dfrac{1}{2}\right)+\pi n,\ \ n\in Z;$

$$2x+\frac{\pi}{4}=(-1)^{n+1}\arcsin\frac{1}{2}+\pi n,\ \ n\in Z;$$

$$2x+\frac{\pi}{4}=(-1)^{n+1}\cdot\frac{\pi}{6}+\pi n,\ \ n\in Z;$$

$$2x=(-1)^{n+1}\cdot\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ \ n\in Z;$$

$$x=(-1)^{n+1}\cdot\frac{\pi}{12}-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}n,\ \ n\in Z.$$

Відповідь. $(-1)^{n+1}\cdot\dfrac{\pi}{12}-\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{\pi}{2}n,\ \ n\in Z.$

б) $\cos\left(\dfrac{x}{4}-\dfrac{\pi}{3}\right)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

$$\frac{x}{4}-\frac{\pi}{3}=\pm\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+2\pi n,\ \ n\in Z;$$

$$\frac{x}{4}-\frac{\pi}{3}=\pm\left(\pi-\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+2\pi n,\ \ n\in Z;$$

$$\frac{x}{4}-\frac{\pi}{3}=\pm\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)+2\pi n,\ \ n\in Z;$$

$$\frac{x}{4}-\frac{\pi}{3}=\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi n,\ \ n\in Z;$$

$$\frac{x}{4}=\pm\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ \ n\in Z;$$

$$x=\pm3\pi+\frac{4\pi}{3}+8\pi n,\ \ n\in Z.$$

Відповідь. $\pm3\pi+\dfrac{4\pi}{3}+8\pi n,\ \ n\in Z.$

в) $\frac{x}{2} = \operatorname{arctg}(-1) + \pi n, \quad n \in Z;$

$\frac{x}{2} = -\frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in Z;$

$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in Z.$

Відповідь. $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in Z.$

г) $\frac{x}{2} = \operatorname{arcctg}(-3) + \pi n, \quad n \in Z;$

$\frac{x}{2} = \pi - \operatorname{arcctg} 3 + \pi n, \quad n \in Z;$

$x = 2\pi - 2\operatorname{arcctg} 3 + 2\pi n, \quad n \in Z.$

Відповідь. $2\pi - 2\operatorname{arcctg} 3 + 2\pi n, \quad n \in Z.$

д) Оскільки $1{,}2 > 1$, то рівняння $\sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{2}\right) = 1{,}2$ розв'язків не має.

Приклад 2. Розв'язати рівняння $\cos^2 x = \frac{1}{4}$.

Розв'язання.

$\frac{1 + \cos 2x}{2} = \frac{1}{4}; \quad 1 + \cos 2x = \frac{1}{2};$

$\cos 2x = \frac{1}{2} - 1; \quad \cos 2x = -\frac{1}{2};$

$2x = \pm \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi n, \quad n \in Z;$

$2x = \pm\left(\pi - \arccos\frac{1}{2}\right) + 2\pi n, \quad n \in Z;$

$2x = \pm\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + 2\pi n, \quad n \in Z;$

$2x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in Z;$

$x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n, \quad n \in Z.$

Відповідь. $\pm\frac{\pi}{3} + \pi n, \quad n \in Z.$

2. Тригонометричні рівняння, які зводяться до квадратних відносно тригонометричних функцій

Це треба знати!

Самовчитель

Приклад 1. Розв'язати рівняння

$\sin^2 x - 4\sin x - 5 = 0.$

Розв'язання.

Нехай $\sin x = t$, тоді $t^2 - 4t - 5 = 0$, $t_1 = 5$, $t_2 = -1$.

$\left[\begin{array}{l} \sin x = 5 \text{ (рівняння розв'язків не має)}, \\ \sin x = -1; \end{array}\right.$

$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in Z.$

Відповідь. $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in Z.$

Приклад 2. Розв'язати рівняння $\cos 2x + \sin x = 0$.

Розв'язання.

$\cos^2 x - \sin^2 x + \sin x = 0;$

$1 - \sin^2 x - \sin^2 x + \sin x = 0;$

$-2\sin^2 x + \sin x + 1 = 0;$

$2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0.$

Нехай $\sin x = t$, тоді $2t^2 - t - 1 = 0$.

$D = 1 + 8 = 9.$

$t_1 = \frac{1+3}{4} = 1; \quad t_2 = \frac{1-3}{4} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}.$

$\left[\begin{array}{l} \sin x = 1, \\ \sin x = -\frac{1}{2}; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \; n \in Z, \\ x = (-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n, \; n \in Z. \end{array}\right.$

Відповідь. $\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad (-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in Z.$

3. Однорідні тригонометричні рівняння

Це треба знати!

Однорідні тригонометричні рівняння — це рівняння, у яких ліва частина є многочленом, у кожному члені якого сума показників степенів синуса і косинуса одного і того самого аргументу однакова, а права — нуль. Однорідні рівняння n-го степеня відносно синуса і косинуса розв'язують діленням обох частин на $\cos^n x$ або $\sin^n x$.

Самовчитель

Приклад 1. Розв'язати рівняння $2\sin^2 x - 3\sin x\cos x + \cos^2 x = 0.$

Розв'язання.

Поділимо обидві частини рівняння на $\cos^2 x \neq 0$. Якщо $\cos^2 x = 0$, тоді $\cos x = 0$. Підставляючи у дане рівняння замість $\cos x$ число 0, дістанемо $2\sin^2 x = 0$, звідки $\sin x = 0$. А це суперечить властивостям синуса і косинуса одного і того самого аргументу, оскільки якщо $\cos x = 0$, то $\sin x \neq 0$.

$$\frac{2\sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{3\sin x\cos x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = 0;$$

$$2\,\mathrm{tg}^2 x - 3\,\mathrm{tg}\, x + 1 = 0;$$

Нехай $\mathrm{tg}\, x = t$, тоді $2t^2 - 3t + 1 = 0$;

$$D = 9 - 8 = 1;\ \ \mathrm{t}_1 = \frac{3+1}{4} = \frac{4}{4} = 1;\ \ t_2 = \frac{3-1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

$$\left[\begin{array}{l} \mathrm{tg}\, x = 1, \\ \mathrm{tg}\, x = \dfrac{1}{2}; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z, \\ x = \mathrm{arctg}\dfrac{1}{2} + \pi n,\ n \in Z. \end{array}\right.$$

Відповідь. $\dfrac{\pi}{4} + \pi n,\ \ \mathrm{arctg}\dfrac{1}{2} + \pi n,\ \ n \in Z.$

Приклад 2. Розв'язати рівняння $\sin^2 x + 3\sin x\cos x = 2.$

Розв'язання.

$$\sin^2 x + 3\sin x\cos x = 2\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right);$$

$$\sin^2 x + 3\sin x\cos x - 2\sin^2 x - 2\cos^2 x = 0;$$

$$-\sin^2 x - 2\cos^2 x + 3\sin x\cos x = 0;$$

$$\sin^2 x - 3\sin x\cos x + 2\cos^2 x = 0.$$

Якщо $\cos x = 0$, тоді $\sin x = 0$ (а це неможливо), тому

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{3\sin x\cos x}{\cos^2 x} + \frac{2\cos^2 x}{\cos^2 x} = 0;$$

$$\mathrm{tg}^2 x - 3\,\mathrm{tg}\, x + 2 = 0.$$

Нехай $\operatorname{tg} x = t$, тоді $t^2 - 3t + 2 = 0$,

$t_1 = 1;\ \ t_2 = 2.$

$$\left[\begin{array}{l}\operatorname{tg} x = 1,\\ \operatorname{tg} x = 2;\end{array}\right. \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z,\\ x = \operatorname{arctg} 2 + \pi n,\ n \in Z.\end{array}\right.$$

Відповідь. $\dfrac{\pi}{4} + \pi n;\ \ \operatorname{arctg} 2 + \pi n,\ \ n \in Z.$

Приклад 3. Розв'язати рівняння $3\sin^2 x + 2\sin x\cos x = 3.$ (1)

Розв'язання.

$3\sin^2 x + 2\sin x\cos x = 3\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right);$

$\cancel{3\sin^2 x} + 2\sin x\cos x - \cancel{3\sin^2 x} - 3\cos^2 x = 0;$

$2\sin x\cos x - 3\cos^2 x = 0;$

$$\frac{2\sin x\cos x}{\cos^2 x} - \frac{3\cos^2 x}{\cos^2 x} = 0;$$

$2\operatorname{tg} x - 3 = 0;$

$\operatorname{tg} x = \dfrac{3}{2} = 1,5;$

$x = \operatorname{arctg} 1,5 + \pi n,\ \ n \in Z.$

Якщо $\cos^2 x = 0$, тоді $\cos x = 0$. Підставляємо в рівняння (1) замість $\cos x$ число 0:

$3\sin^2 x + 2\sin x \cdot 0 = 3;\ \ 3\sin^2 x = 3;\ \ 3\left(1 - \cos^2 x\right) = 3;$

$3(1 - 0) = 3;$

$3 = 3.$

Отже, розв'язки рівняння $\cos x = 0$ є розв'язками рівняння (1).

Відповідь. $\dfrac{\pi}{2} + \pi n;\ \ \operatorname{arctg} 1,5 + \pi n,\ n \in Z.$

4. Тригонометричні рівняння, які розв'язуються способом розкладання на множники

Це треба знати!

Самовчитель

Приклад 1. Розв'язати рівняння

$\sin 3x + \sin x = \sin 4x.$

Розв'язання.

$$2\sin\frac{3x + x}{2}\cos\frac{3x - x}{2} = 2\sin 2x\cos 2x;$$

$$2\sin 2x\cos x - 2\sin 2x\cos 2x = 0;$$

$$2\sin 2x(\cos x - \cos 2x) = 0;$$

$$2\sin 2x\cdot\left(-2\sin\frac{x-2x}{2}\sin\frac{x+2x}{2}\right) = 0;$$

$$4\sin 2x\sin\frac{x}{2}\sin\frac{3x}{2} = 0;$$

$$\left[\begin{array}{l}\sin 2x = 0,\\ \sin\frac{x}{2} = 0,\\ \sin\frac{3x}{2} = 0;\end{array}\right.\quad \left[\begin{array}{l}2x = \pi n,\ n\in Z;\\ \frac{x}{2} = \pi n,\ n\in Z;\\ \frac{3x}{2} = \pi n,\ n\in Z;\end{array}\right.\quad \left[\begin{array}{l}x = \frac{\pi}{2}n,\ n\in Z,\\ x = 2\pi n,\ n\in Z,\\ x = \frac{2}{3}\pi n,\ n\in Z.\end{array}\right.$$

Відповідь. $\frac{\pi}{2}n,\ \frac{2}{3}\pi n,\ n\in Z.$

Приклад 2. Розв'язати рівняння $3\sin x = 2(1-\cos x)$.

Розв'язання.

$$3\cdot 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\cdot 2\sin^2\frac{x}{2};$$

$$6\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} - 4\sin^2\frac{x}{2} = 0;$$

$$3\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} - 2\sin^2\frac{x}{2} = 0;$$

$$\sin\frac{x}{2}\left(3\cos\frac{x}{2} - 2\sin\frac{x}{2}\right) = 0;$$

$$\left[\begin{array}{l}\sin\frac{x}{2} = 0,\\ 3\cos\frac{x}{2} - 2\sin\frac{x}{2} = 0;\end{array}\right.\quad \left[\begin{array}{l}\frac{x}{2} = \pi n,\ n\in Z,\\ 3 - 2\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2} = 0;\end{array}\right.\quad \left[\begin{array}{l}x = 2\pi n,\ n\in Z,\\ \mathrm{tg}\,\frac{x}{2} = 1,5;\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}x = 2\pi n,\ n\in Z,\\ \frac{x}{2} = \mathrm{arctg}\,1,5 + \pi n,\ n\in Z;\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}x = 2\pi n,\\ x = 2\,\mathrm{arctg}\,1,5 + 2\pi n,\ n\in Z.\end{array}\right.$$

Відповідь. $2\pi n;\ 2\,\mathrm{arctg}\,1,5 + 2\pi n,\ n\in Z.$

5. Метод введення допоміжного кута

Це треба знати!

Рівняння виду $a\sin x + b\cos x = c$, де a, b, c — деякі відмінні від нуля числа, зручно розв'язувати методом введення допоміжного кута. Поділимо обидві частини рівняння на $\sqrt{a^2+b^2}$;

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Оскільки $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1$, то існує такий кут φ, що

$$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a+b^2}}, \\ \sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \end{cases} \text{ звідси } \operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}, \quad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{b}{a} + \pi n, n \in Z.$$

Тоді $\sin x\cos\varphi + \cos x\sin\varphi = \dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$;

$$\sin(x+\varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}};$$

$$x+\varphi = (-1)^n \cdot \arcsin\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} + \pi n, n \in Z;$$

$$x = (-1)^n \cdot \arcsin\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} - \operatorname{arctg}\frac{b}{a} + \pi n, n \in Z,$$

якщо $c^2 \le a^2 + b^2$.

Самовчитель

Приклад. Розв'язати рівняння

$8\sin x - 3\cos x = 4.$

Розв'язання.

$$\frac{8}{\sqrt{8^2+(-3)^2}}\sin x - \frac{3}{\sqrt{8^2+(-3)^2}}\cos x = \frac{4}{\sqrt{8^2+(-3)^2}};$$

$$\frac{8}{\sqrt{73}}\sin x - \frac{3}{\sqrt{73}}\cos x = \frac{4}{\sqrt{73}}.$$

Оскільки $\left(\frac{8}{\sqrt{73}}\right)^2 + \left(\frac{3}{\sqrt{73}}\right)^2 = 1$, то існує такий кут φ, що

$$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{8}{\sqrt{73}}, \\ \sin\varphi = \dfrac{3}{\sqrt{73}}, \end{cases} \text{ звідси } \operatorname{tg}\varphi = \frac{3}{8},$$

$\varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{3}{8} + \pi n,\ n \in Z.$

Тоді, $\cos\varphi \sin x - \cos x \sin\varphi = \dfrac{4}{\sqrt{73}};$

$\sin(x - \varphi) = \dfrac{4}{\sqrt{73}};$

$x - \varphi = (-1)^n \cdot \arcsin\dfrac{4}{\sqrt{73}} + \pi n,\ n \in Z,$

$x = (-1)^n \cdot \arcsin\dfrac{4}{\sqrt{73}} + \operatorname{arctg}\dfrac{3}{8} + \pi n,\ n \in Z.$

Відповідь. $(-1)^n \cdot \arcsin\dfrac{4}{\sqrt{73}} + \operatorname{arctg}\dfrac{3}{8} + \pi n,\ n \in Z.$

Це треба знати!

6. Дробові раціональні рівняння відносно тригонометричних функцій

Самовчитель

Приклад 1. Розв'язати рівняння

$$\frac{1 + \cos 2x}{1 - \sin x} = 0.$$

Розв'язання.

$$\begin{cases} 1 + \cos 2x = 0, \\ 1 - \sin x \ne 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \cos 2x = -1, \\ \sin x \ne 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x = \pi + 2\pi n,\ n \in Z, \\ x \ne \dfrac{\pi}{2} + 2\pi m,\ m \in Z; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z, \\ x \ne \dfrac{\pi}{2} + 2\pi m,\ m \in Z. \end{cases}$$

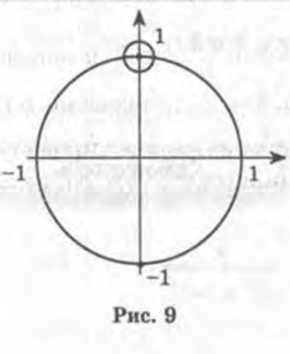


Рис. 9

На одиничному колі (рис. 9) позначаємо серію кутів $\dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z,$ а серію кутів $\dfrac{\pi}{2} + 2\pi m,\ n \in Z$ виключаємо. Відповідь до рівняння дає серія кутів, що залишилася: $x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z.$

Відповідь. $x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z.$

Приклад 2. Розв'язати рівняння $\dfrac{\sin 3x - \sin x}{1 + \cos x} = 0.$

Розв'язання.

$$\begin{cases} \sin 3x - \sin x = 0, \\ 1 + \cos x \neq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\sin\dfrac{3x - x}{2}\cos\dfrac{3x + x}{2} = 0, \\ \cos x \neq -1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \sin x = 0, \\ \cos 2x = 0, \end{array}\right. \\ x \neq \pi + 2\pi n\ n \in Z; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = \pi k,\ k \in Z, \\ 2x = \dfrac{\pi}{2} + \pi m,\ m \in Z, \end{array}\right. \\ x \neq \pi + 2\pi n,\ n \in Z; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = \pi k,\ k \in Z, \\ x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{2}m,\ m \in Z, \end{array}\right. \\ x \neq \pi + 2\pi n,\ n \in Z. \end{cases}$$

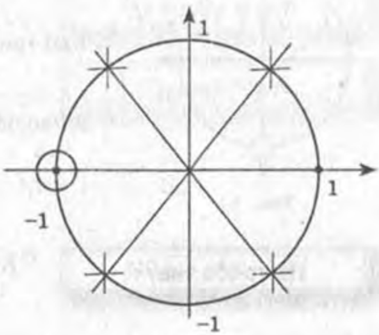


Рис. 10

На одиничному колі (рис. 10) серію кутів $\pi k,\ k \in Z$ позначаємо позначкою «*», серію кутів $\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{2}m,\ m \in Z$ позначаємо позначкою «×», а серію кутів $\pi + 2\pi n,\ n \in Z$ виключаємо. Відповідь на рівняння дають серії кутів, що залишилися: $x = 2\pi l,\ l \in Z$; $\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{2}m,\ m \in Z$.

Відповідь. $2\pi l,\ \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{2}m,\ l, m \in Z$.

Приклад 3. Розв'язати рівняння $\dfrac{3\cos^2 x - 4\cos x}{1 + \sin x} = 0.$

Розв'язання.

$$\begin{cases} 3\cos^2 x - 4\cos x = 0, \\ 1 + \sin x \neq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos x\,(3\cos x - 4) = 0, \\ \sin x \neq -1; \end{cases}$$

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\cos x = 0,\\ 3\cos x - 4 = 0,\end{array}\right.\\ x \neq -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z;\end{cases} \quad \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{2} + \pi m,\ m \in Z,\\ \cos x = \dfrac{4}{3}\ \text{(розв'язків немає)},\end{array}\right.\\ x \neq -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z.\end{cases}$$

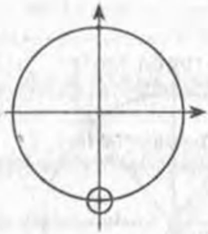


Рис. 11

Тоді (рис. 11), $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z.$

Відповідь. $\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z.$

Це треба знати!

7. Оцінка лівої і правої частин рівняння

Самовчитель

Приклад 1. Розв'язати рівняння $2\sin^5 x + 3\cos^8 x = 5.$

Розв'язання.

Оскільки $|\sin x| \le 1,\ |\cos x| \le 1,$

то $|2\sin^5 x + 3\cos^8 x| \le 2|\sin^5 x| + 3\cos^8 x \le 5.$

Дана нерівність могла б стати рівністю, коли $\sin x = 1$ і $|\cos x| = 1$, що неможливо, оскільки $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Отже, дане рівняння розв'язків не має.

Приклад 2. Розв'язати рівняння $\sin^4 x + \cos^6 x = 2.$

Розв'язання.

Оскільки $\begin{cases}\sin^4 x \le \sin^2 x,\\ \cos^6 x \le \cos^2 x,\end{cases}$ то $\sin^4 x + \cos^6 x \le \sin^2 x + \cos^2 x = 1.$

Отже, $\sin^4 x + \cos^6 x \le 1.$

Відповідь. Рівняння коренів не має.

Приклад 3. Розв'язати рівняння $\sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 3.$

Розв'язання.

Ліва частина рівняння може дорівнювати 3 лише в тому випадку, коли одночасно виконуються три рівності:

$\sin 2x = 1,\ \ \sin 3x = 1,\ \ \sin 4x = 1.$

Якщо $\sin 2x = 1$, тоді $x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$, проте

$$\sin 3x = \sin 3\left(\frac{\pi}{4} + \pi n\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{4} + 3\pi n\right) \neq 1.$$

Відповідь. Рівняння розв'язків не має.

8. Заміна $t = \sin x + \cos x$

Це треба знати!

Приклад. Розв'язати рівняння

$2(\sin x + \cos x) + \sin 2x + 1 = 0.$

Самовчитель

Розв'язання.

Нехай $\sin x + \cos x = t$,

тоді $t^2 = \sin^2 x + 2\sin x\cos x + \cos^2 x = 1 + \sin 2x$;

$t^2 + 2t = 0;\ t(t+2) = 0;$

$$\left[\begin{array}{l} t = 0, \\ t + 2 = 0; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} t = 0, \\ t = -2; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \sin x + \cos x = 0, \\ \sin x + \cos x = -2. \end{array}\right.$$

Розв'яжемо рівняння $\sin x + \cos x = 0$:

$\operatorname{tg} x + 1 = 0,\ \operatorname{tg} x = -1;$

$x = -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z.$

Рівняння $\sin x + \cos x = -2$ розв'язків не має, оскільки $(-2)^2 > 1^2 + 1^2$.

Відповідь. $-\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z.$

9. Заміна $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$

Це треба знати!

При такій заміні

$$\sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2};$$

$$\cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Таким чином, ми отримуємо таку заміну:

$$\begin{cases} \mathrm{tg}\,\dfrac{x}{2} = t, \\ \sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}, \\ \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}. \end{cases}$$

Самовчитель

Приклад. Розв'язати рівняння

$$\sin x + \mathrm{ctg}\,\frac{x}{2} = 2.$$

Розв'язання.

Нехай $\mathrm{tg}\,\dfrac{x}{2} = t$, тоді $\mathrm{ctg}\,\dfrac{x}{2} = \dfrac{1}{t}$.

Ми можемо використати дану заміну, оскільки $x = \pi + 2\pi n$, $n \in Z$ не є коренями даного рівняння.

$$\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1}{t} = 2, \quad \frac{2t^2+1+t^2}{t(1+t^2)} = 2; \quad \begin{cases} 3t^2+1 = 2t^3+2t, \\ t \neq 0. \end{cases}$$

$$2t^3 - 3t^2 + 2t - 1 = 0, \quad (t-1)(2t^2 - t + 1) = 0,$$

$$\left[\begin{array}{l} t - 1 = 0, \\ 2t^2 - t + 1 = 0 \text{ (рівняння не має дійсних коренів);} \end{array}\right.$$

$$t = 1;$$

$$\mathrm{tg}\,\frac{x}{2} = 1; \quad \frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z; \quad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z.$$

Відповідь. $\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$.

Перевір себе

Вправи для самостійного розв'язування

Розв'язати рівняння:

1) $\sin\left(\dfrac{\pi}{4} - 3x\right) = -1$; 2) $\cos\left(\dfrac{3\pi}{4} + \dfrac{x}{2}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

3) $\mathrm{ctg}\left(\dfrac{\pi}{6} - 2x\right) = -3$; 4) $\mathrm{tg}\left(\dfrac{\pi}{8} - \dfrac{x}{2}\right) = \sqrt{3}$;

5) $\sin\left(\dfrac{\pi}{6} + 2x\right) = -\dfrac{1}{2}$; 6) $\cos\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{x}{3}\right) = 1$;

7) $\sin\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{x}{2}\right) = 0$; 8) $\sin^2 x + 2\sin x\cos x - 3\cos^2 x = 0$;

9) $6\sin^2 x - 3\sin x\cos x - 5\cos^2 x = 2;$

10) $5\sin^2 x + 3\sin x\cos x + 4\cos^2 x = 3;$

11) $\cos x - \cos 3x + \sin x = 0;$

12) $6\cos^2 x + 5\sin x - 7 = 0;$

13) $2\operatorname{tg}\dfrac{x}{4} - 2\operatorname{ctg}\dfrac{x}{4} = 3;$

14) $\operatorname{tg}\dfrac{x}{3} - 5\operatorname{ctg}\dfrac{x}{3} = 4;$

15) $2\sin^2 x = 1 + \cos x;$

16) $2\cos^2 x = 1 + \sin x;$

17) $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 0;$

18) $\cos 2x + 5\sin x + 2 = 0;$

19) $4\sin^2 x - 11\cos x - 1 = 0;$

20) $1 - \cos 8x = \sin 4x;$

21) $\cos 2x + \sin x = 0;$

22) $3\sin x = 2\cos^2 x;$

23) $\sin x + \cos^2 x = \dfrac{1}{4};$

24) $2\cos^2 x + \sqrt{3}\cos x = 0;$

25) $\sin 2x = \cos^4\dfrac{x}{2} - \sin^4\dfrac{x}{2};$

26) $\cos^2 x + 3\sin^2 x + 2\sqrt{3}\sin x\cos x = 1;$

27) $3\cos^2 x - \sin^2 x - \sin 2x = 0;$

28) $\sin^2 x + \dfrac{3}{2}\cos^2 x = \dfrac{5}{2}\sin x\cos x;$

29) $\sin^2 x + \dfrac{1}{2}\sin 2x = 1;$

30) $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 1;$

31) $\sin x + 2\cos x = 1;$

32) $\sin 3x + \cos 3x = \sqrt{2};$

33) $\cos 3x = \cos x;$

34) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0;$

35) $\cos 3x = 2\sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$;

36) $\sin x + \sin 7x - \cos 5x + \cos(3x - 2\pi) = 0$;

37) $1 - \sin 3x = \left(\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\right)^2$;

38) $(1 + \cos 4x)\sin 2x = \cos^2 2x$;

39) $\sin^4\frac{x}{3} + \cos^4\frac{x}{3} = \frac{5}{8}$;

40) $6\sin^2 x + 2\sin x\cos x = 6$;

41) $3\sin^3 x + 4\cos^4 x = 7$.

§ 7. Додаткові відомості про рівняння

Це треба знати!

1. Рівняння з модулями

Для того щоб розв'язати рівняння, що містить змінну під знаком модуля, треба звільнитися від знака модуля, використавши його визначення

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \geq 0, \\ -x, & \text{якщо } x < 0. \end{cases}$$

При розв'язуванні таких рівнянь треба дотримуватися плану:

1) знайти ті значення змінної, при яких вирази, що містяться під знаком модуля, перетворюються в нуль;
2) область допустимих значень змінної розбити на проміжки, на кожному з яких вирази, що містяться під знаком модуля, зберігають знак;
3) на кожному з проміжків розв'язати рівняння без знака модуля;
4) сукупність розв'язків на вказаних проміжках і буде розв'язками даного рівняння.

Самовчитель

Приклад. Розв'язати рівняння:
а) $|x + 5| = 6$; б) $|7x - 2| = -3$;
в) $|x + 2| = x + 2$; г) $|x - 2| + |x - 3| + |2x - 8| = 9$.

Розв'язання.

а) $\left[\begin{array}{l} x + 5 = -6, \\ x + 5 = 6; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x = -6 - 5, \\ x = 6 - 5; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x = -11, \\ x = 1. \end{array}\right.$

Відповідь. -11; 1.

б) Рівняння розв'язків не має, оскільки модуль не може бути від'ємним.

в) Знаходимо значення x, при якому модуль дорівнює 0: $x+2=0$, $x=-2$.

Розглядаємо два випадки (рис. 12.):

1) $x \in (-\infty; -2]$.

$-(x+2)=x+2;\ -x-2=x+2;$

$-x-x=2+2;\ -2x=4;$

$x=-2$ — корінь рівняння.

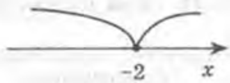


Рис. 12

2) $x \in (-2; +\infty)$.

$x+2=x+2;\ x-x=2-2;\ 0x=0;$ x — будь-яке з $(-2; +\infty)$.

Відповідь. $[-2; +\infty)$.

г) Значення x, при яких модулі дорівнюють 0, розбивають числову пряму на чотири проміжки (рис. 13).

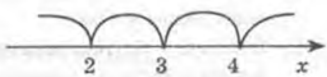


Рис. 13

Розглянемо чотири випадки:

1) $x \in (-\infty; 2]$.

$-(x-2)-(x-3)-(2x-8)=9;\ -x+2-x+3-2x+8=9;$

$-4x=-4;\ x=1$ — корінь рівняння.

2) $x \in (2; 3]$.

$x-2-(x-3)-(2x-8)=9;\ x-2-x+3-2x+8=9;$

$-2x=0;\ x=0$ — не є коренем рівняння.

3) $x \in (3; 4]$.

$x-2+x-3-(2x-8)=9;\ x-2+x-3-2x+8=9;$

$0x=6$ (рівняння коренів не має).

4) $x \in (4; +\infty)$.

$x-2+x-3+2x-8=9;\ 4x=9+13;$

$4x=22;\ x=\frac{22}{4}=\frac{11}{2}=5{,}5$ — корінь рівняння.

Отже, коренями рівняння є числа 1 і 5,5.

Відповідь. 1; 5,5.

2. Рівняння з параметрами

Це треба знати!

Рівняння з параметрами — це рівняння, до запису якого, крім змінної та числових коефіцієнтів входять також буквені коефіцієнти — параметри.

Будь-яке рівняння з параметром можна розв'язувати як звичайне рівняння до тих пір, поки всі перетворення або міркування, необхідні для розв'язування, можна виконати однозначно. Якщо певне перетворення не можна виконати однозначно, то розв'язування необхідно розбити на кілька випадків, щоб у кожному з них відповідь через параметри записувалася однозначно.

Самовчитель

Приклад 1. Розв'язати рівняння

$a^2x = a(x+2) - 2.$

Розв'язання.

$a^2x = ax + 2a - 2;\ \ a^2x - ax = 2a - 2;$

$x(a^2 - a) = 2(a-1);\ \ a(a-1)x = 2(a-1).$

1) Якщо $a = 0$, тоді маємо лінійне рівняння $0x = -2$, яке розв'язків не має.
2) Якщо $a = 1$, тоді маємо лінійне рівняння $0x = 0$, і його коренем є будь-яке число.
3) Якщо $a(a-1) \neq 0$, тобто $a \neq 0$ і $a \neq 1$, то $x = \dfrac{2(a-1)}{a(a-1)} = \dfrac{2}{a}$.

Відповідь. Якщо $a = 0$, то коренів немає; якщо $a = 1$, то x — будь-яке число; якщо $a \neq 0$ і $a \neq 1$, то $x = \dfrac{2}{a}$.

Приклад 2. Розв'язати рівняння

$(a^2 + a - 2)x^2 + (2a^2 + a + 3)x + a^2 - 1 = 0.$

Розв'язання.

Нехай $a^2 + a - 2 \neq 0$, тоді $a \neq 1$, $a \neq -2$.

$$D = (2a^2 + a + 3)^2 - 4(a^2 + a - 2)(a^2 - 1) =$$
$$= 4a^4 + a^2 + 9 + 4a^3 + 12a^2 + 6a - 4(a^4 - a^2 + a^3 - a - 2a^2 + 2) =$$
$$= \cancel{4a^4} + a^2 + 9 + \cancel{4a^3} + 12a^2 + 6a - \cancel{4a^4} + 4a^2 - \cancel{4a^3} + 4a + 8a^2 - 8 =$$
$$= 25a^2 + 10a + 1 = (5a+1)^2 \geq 0.$$

$$x_{1,2} = \frac{-(2a^2 + a + 3) \pm (5a + 1)}{2(a^2 + a - 2)};$$

$$x_1 = \frac{-2a^2 - a - 3 + 5a + 1}{2(a-1)(a+2)} = \frac{-2a^2 + 4a - 2}{2(a-1)(a+2)} = \frac{-2(a^2 - 2a + 1)}{2(a-1)(a+2)} =$$
$$= \frac{-2(a-1)^2}{2(a-1)(a+2)} = -\frac{a-1}{a+2};$$

$$x_2 = \frac{-2a^2 - a - 3 - 5a - 1}{2(a-1)(a+2)} = \frac{-2a^2 - 6a - 4}{2(a-1)(a+2)} = \frac{-2(a^2 + 3a + 2)}{2(a-1)(a+2)} =$$

$$= \frac{-2(a+1)(a+2)}{2(a-1)(a+2)} = -\frac{a+1}{a-1}.$$

Якщо $a = 1$, то маємо рівняння $6x = 0$, звідси $x = 0$;

Якщо $a = -2$, то маємо рівняння $9x + 3 = 0$; $9x = -3$; $x = -\frac{1}{3}$.

Відповідь. Якщо $a = 1$, то $x = 0$; якщо $a = -2$, то $x = -\frac{1}{3}$; якщо $a \neq 1$ і $a \neq -2$, то $x_1 = -\frac{a-1}{a+2}$, $x_2 = -\frac{a+1}{a-1}$.

Приклад 3. Розв'язати рівняння $a \sin 2x = \cos x$.

Розв'язання.

$2a \sin x \cos x = \cos x$; $2a \sin x \cos x - \cos x = 0$;

$\cos x (2a \sin x - 1) = 0$;

$$\left[\begin{array}{l} \cos x = 0, \\ 2a \sin x - 1 = 0; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \ n \in Z, \\ \sin x = \frac{1}{2a}. \end{array}\right.$$

1) Якщо $-1 \le \frac{1}{2a} \le 1$, тобто $\left[\begin{array}{l} a \ge \frac{1}{2}, \\ a \le -\frac{1}{2}, \end{array}\right.$

то $x = (-1)^k \cdot \arcsin \frac{1}{2a} + \pi k, \ k \in Z.$

2) Якщо $-\frac{1}{2} < a < \frac{1}{2}$, то рівняння $\sin x = \frac{1}{2a}$ розв'язків не має.

Побудуємо вісь параметрів (рис. 14).

1. $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \ n \in Z.$

2. $x = (-1)^k \cdot \arcsin \frac{1}{2a} + \pi k, \ k \in Z.$

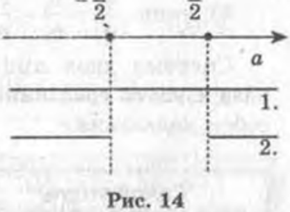


Рис. 14

Відповідь.

1) Якщо $a \le -\frac{1}{2}$ або $a \ge \frac{1}{2}$,

то $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \ n \in Z$; $x = (-1)^k \cdot \arcsin \frac{1}{2a} + \pi k, \ k \in Z.$

2) Якщо $-\frac{1}{2} < a < \frac{1}{2}$, то $x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$.

Перевір себе

Вправи для самостійного розв'язування

Розв'язати рівняння.

1) $|2x-5|=1$;
2) $|3x-8|-2=10$;
3) $|6x-4|+10=7$;
4) $|x-2|=x+3$;
5) $|2x-1|+|x+4|=|x-2|$;
6) $|3x+6|-|5-x|=1$;
7) $2-|x+5|=|x-4|-|2+x|$;
8) $(a+1)x=a^2-1$;
9) $(a^2-4)x=a^3-8$;
10) $a^2x^4-2ax^2-a^2+1=0$;
11) $|x-a|=|x-3|$;
12) $3x^2-|5x+2|=0$;
13) $x^2-2|x|-3=0$;
14) $|x-2|+|x+2|=7$.

§ 8. Системи рівнянь

Це треба знати!

1. Системи двох лінійних рівнянь із двома змінними

Розглянемо систему двох лінійних рівнянь із двома змінними:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2. \end{cases} \qquad (1)$$

1) Якщо $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$, то система (1) має єдиний розв'язок;

2) якщо $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$, то система (1) не має розв'язків;

3) якщо $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$, то система (1) має безліч розв'язків.

Системи двох лінійних рівнянь з двома змінними можна розв'язувати графічним способом, способом підстановки або способом додавання.

Самовчитель

Приклад 1. Розв'язати систему лінійних рівнянь способом підстановки.

$$\begin{cases} 3x+4y=-5, \\ 5x-3y=11. \end{cases}$$

Розв'язання.

Оскільки: $\frac{3}{5} \neq -\frac{4}{3}$, то дана система має один розв'язок.

Виразимо з першого рівняння x через y: $x = \frac{-5-4y}{3}$, тоді замість x в друге рівняння підставимо $\frac{-5-4y}{3}$ і будемо мати:

$5 \cdot \left(\frac{-5-4y}{3}\right) - 3y = 11;$

$5(-5-4y) - 9y = 33;$

$-25 - 20y - 9y = 33;$

$-20y - 9y = 33 + 25;$

$-29y = 58;\ y = -2.$

Якщо $y = -2$, тоді $x = \frac{-5-4\cdot(-2)}{3} = \frac{-5+8}{3} = \frac{3}{3} = 1.$

Відповідь. (1; –2).

Приклад 2. Розв'язати систему лінійних рівнянь способом додавання: $\begin{cases} 5x - 6y = 1, \\ 3x + 4y = 12. \end{cases}$

Розв'язання.

Помножимо перше рівняння на 2, а друге рівняння на 3, одержимо систему: $\begin{cases} 10x - 12y = 2, \\ 9x + 12y = 36. \end{cases}$

Додавши почленно рівняння системи, одержимо:

$19x = 38;\ x = 38 : 19;\ x = 2.$

Підставивши в перше рівняння $x = 2$, одержуємо y:

$5 \cdot 2 - 6y = 1;\ 10 - 6y = 1;\ 6y = 9;$

$y = \frac{9}{6} = \frac{3}{2} = 1{,}5.$

Отже, (2; 1,5) — розв'язок даної системи.

Відповідь. (2; 1,5).

2. Системи рівнянь із двома змінними, де одним із рівнянь є лінійне рівняння

Це треба знати!

Якщо в системі рівнянь із двома змінними одне з рівнянь є лінійним, то таку систему можна розв'язати способом підстановки.

Самовчитель

Приклад. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x - 2y = 4, \\ x^2 - 3xy - 2y^2 = 8. \end{cases}$$

Розв'язання.

$$\begin{cases} x = 4 + 2y, \\ (4+2y)^2 - 3(4+2y)\cdot y - 2y^2 = 8; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 4 + 2y, \\ 16 + 16y + 4y^2 - 12y - 6y^2 - 2y^2 = 8; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 4 + 2y, \\ 4y^2 - 4y - 8 = 0; \end{cases} \begin{cases} x = 4 + 2y, \\ y^2 - y - 2 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 4 + 2y, \\ \left[\begin{array}{l} y = 2, \\ y = -1; \end{array}\right. \end{cases} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 4 + 2y, \\ y = 2; \end{cases} \\ \begin{cases} x = 4 + 2y, \\ y = -1; \end{cases} \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 8, \\ y = 2; \end{cases} \\ \begin{cases} x = 2, \\ y = -1. \end{cases} \end{array}\right.$$

Відповідь. (8; 2); (2; –1).

3. Системи рівнянь, які розв'язуються за допомогою заміни змінних

Самовчитель

Приклад 1. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{4}{x+y-1} - \dfrac{5}{2x-y+3} = -2{,}5; \\ \dfrac{3}{x+y-1} + \dfrac{1}{2x-y+3} = -1{,}4. \end{cases}$$

Розв'язання.

Нехай $x + y - 1 = \dfrac{1}{t}$; $2x - y + 3 = \dfrac{1}{z}$, тоді

$$\begin{cases} 4t - 5z = -2{,}5, \\ 3t + z = -1{,}4. \end{cases}$$

Помноживши друге рівняння системи на 5, отримаємо:

$$\begin{cases} 4t - 5z = -2{,}5, \\ 15t + 5z = -7. \end{cases}$$

Додавши почленно рівняння системи, матимемо:

$19t = -9{,}5;$

$$t = -\frac{9{,}5}{19} = -0{,}5, \text{ тоді } z = -1{,}4 + 3\cdot 0{,}5 = -1{,}4 + 1{,}5 = 0{,}1.$$

Отже, $\begin{cases} x+y-1=-2, \\ 2x-y+3=10. \end{cases}$

Додавши почленно рівняння системи, матимемо:

$3x+2=8$; $3x=6$; $x=2$. Тоді $y=-2+1-2=-3$.

Відповідь. (2; –3).

Приклад 2. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x^2+y^2+x+y=32, \\ xy+2(x+y)=26. \end{cases}$$

Розв'язання.

Нехай $x+y=u$, $xy=v$, тоді $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=u^2-2v$.

$$\begin{cases} u^2-2v+u=32, \\ v+2u=26; \end{cases}$$

$$\begin{cases} v=26-2u, \\ u^2-2(26-2u)+u=32; \end{cases} \quad \begin{cases} v=26-2u, \\ u^2-52+4u+u-32=0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} v=26-2u, \\ u^2+5u-84=0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} v=26-2u, \\ \left[\begin{array}{l} u=-12, \\ u=7; \end{array}\right. \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} v=26-2u, \\ u=-12, \end{cases} \\ \begin{cases} v=26-2u, \\ u=7; \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} v=50, \\ u=-12, \end{cases} \\ \begin{cases} v=12, \\ u=7; \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+y=-12, \\ xy=50, \end{cases} \\ \begin{cases} x+y=7, \\ xy=12; \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=-12-y, \\ y(-12-y)=50, \end{cases} \\ \begin{cases} x=7-y, \\ y(7-y)=12; \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x=-12-y, \\ y^2+12y+50=0, \text{ (рівняння дійсних коренів не має)}, \\ \begin{cases} x=7-y, \\ y^2-7y+12=0. \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} x=7-y, \\ \left[\begin{array}{l} y=3, \\ y=4; \end{array}\right. \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=7-y, \\ y=3, \end{cases} \\ \begin{cases} x=7-y, \\ y=4; \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=4, \\ y=3, \end{cases} \\ \begin{cases} x=3, \\ y=4. \end{cases} \end{array}\right.$$

Відповідь. (4; 3); (3; 4).

Це треба знати!

4. Однорідні системи двох рівнянь другого степеня з двома змінними

Однорідними системами двох рівнянь другого степеня з двома змінними називаються системи виду $\begin{cases} a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 = d_1, \\ a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2 = d_2. \end{cases}$

Якщо $d_1 \neq 0$ і $d_2 \neq 0$, тоді помножимо обидві частини першого рівняння системи на d_2, а обидві частини другого рівняння на $-d_1$ і додамо отримані рівняння. Внаслідок цього отримаємо рівняння виду $Ax^2 + Bxy + Cy^2 = 0$.

Якщо $y \neq 0$, тоді дане рівняння рівносильне рівнянню

$A\left(\dfrac{x}{y}\right)^2 + B\left(\dfrac{x}{y}\right) + C = 0$, яке є квадратним відносно $\dfrac{x}{y}$.

Самовчитель

Приклад 1. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} x^2 + 3xy - 4y^2 = -9, \\ 2x^2 - 5xy + 3y^2 = 4. \end{cases}$

Розв'язання.

$$\begin{cases} x^2 + 3xy - 4y^2 = -9, \\ 2x^2 - 5xy + 3y^2 = 4. \end{cases}$$

Помножимо перше рівняння на 4, а друге — на 9, одержимо:

$$\begin{cases} 4x^2 + 12xy - 16y^2 = -36, \\ 18x^2 - 45xy + 27y^2 = 36. \end{cases}$$

Додавши почленно рівняння системи, одержимо:

$22x^2 - 33xy + 11y^2 = 0;$ $2x^2 - 3xy + y^2 = 0.$

Зрозуміло, що при $y = 0$ система розв'язків не має.

Тоді при $y \neq 0$ $2\left(\dfrac{x}{y}\right)^2 - 3 \cdot \dfrac{x}{y} + 1 = 0.$

Нехай $\dfrac{x}{y} = t$, тоді $2t^2 - 3t + 1 = 0;$ $D = 9 - 8 = 1;$

$t_1 = \dfrac{3+1}{4} = 1;$ $t_2 = \dfrac{3-1}{4} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$. Отже,

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \dfrac{x}{y} = 1, \\ \dfrac{x}{y} = \dfrac{1}{2}, \end{array}\right. \\ 2x^2 - 5xy + 3y^2 = 4; \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = y, \\ 2x^2 - 5xy + 3y^2 = 4, \end{cases} \\ \begin{cases} y = 2x, \\ 2x^2 - 5xy + 3y^2 = 4; \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2x^2-5x^2+3x^2=4,\\ x=y,\end{cases}\\ \begin{cases}2x^2-10x^2+12x^2=4,\\ y=2x;\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}0x^2=4 \text{ (рівняння дійсних коренів не має)},\\ x=y,\end{cases}\\ \begin{cases}4x^2=4,\\ y=2x;\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\begin{cases}x^2=1,\\ y=2x;\end{cases} \qquad \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=-1,\\ x=1,\end{array}\right.\\ y=2x;\end{cases} \qquad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=-1,\\ y=-2,\end{cases}\\ \begin{cases}x=1,\\ y=2.\end{cases}\end{array}\right.$$

***Відповідь*. (–1; –2); (1; 2).**

5. Системи симетричних алгебраїчних рівнянь

Це треба знати!

Нехай система $\begin{cases}F_1(x, y)=0,\\ F_2(x; y)=0\end{cases}$ така, що $F_1(x, y)$ і $F_2(x, y)$ є симетричними многочленами, тобто $F_1(x, y)$ і $F_2(x, y)$ не змінюються при заміні x на y, а y на x.

Оскільки будь-який симетричний многочлен $F(x, y)$ можна виразити через симетричні многочлени $\sigma_1 = x + y$ і $\sigma_2 = xy$, то для розв'язання системи симетричних рівнянь треба ввести нові змінні σ_1 і σ_2. У результаті такої заміни система зведеться до більш простої.

Самовчитель

Приклад. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases}x^3+y^3=7,\\ x^2y+xy^2=-2.\end{cases}$$

Розв'язання.

Оскільки

$$x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)=(x+y)\left((x+y)^2-2xy-xy\right)=$$

$$=(x+y)\left((x+y)^2-3xy\right)=\sigma_1(\sigma_1^2-3\sigma_2);$$

$$x^2y+xy^2=xy(x+y)=\sigma_2\cdot\sigma_1,$$

то маємо систему:

$$\begin{cases}\sigma_1\left(\sigma_1^2-3\sigma_2\right)=7;\\ \sigma_2\cdot\sigma_1=-2.\end{cases}$$

Виразимо σ_2 із другого рівняння: $\sigma_2=-\dfrac{2}{\sigma_1}$,

тоді $\sigma_1\left(\sigma_1^2+\dfrac{6}{\sigma_1}\right)=7;\ \ \sigma_1^3+6=7;\ \ \sigma_1^3=1;\ \ \sigma_1=1.$

Тоді $\sigma_2=-\dfrac{2}{\sigma_1}=-2.$

Отже, маємо систему: $\begin{cases}x+y=1,\\ xy=-2.\end{cases}$

Розв'яжемо її: $\begin{cases}x=1-y,\\ y(1-y)=-2;\end{cases}$ $\begin{cases}x=1-y,\\ y^2-y-2=0;\end{cases}$

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}y=2,\\ y=-1,\end{array}\right.\\ x=1-y;\end{cases}\quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}y=2,\\ x=-1,\end{cases}\\ \begin{cases}y=-1;\\ x=2.\end{cases}\end{array}\right.$$

Відповідь. $(-1;\ 2);\ (2;\ -1)$.

6. Системи, які містять ірраціональні рівняння

Самовчитель

Приклад 1. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=3,\\ x+y=5.\end{cases}$

Розв'язання.

Нехай $\sqrt{x}=u;\ \ \sqrt{y}=v$, тоді $\begin{cases}u+v=3,\\ u^2+v^2=5.\end{cases}$

Розв'яжемо цю систему:

$$\begin{cases}u=3-v,\\ (3-v)^2+v^2=5;\end{cases}\quad \begin{cases}u=3-v,\\ 9-6v+v^2+v^2=5;\end{cases}$$

$$\begin{cases}u=3-v,\\ 2v^2-6v+4=0;\end{cases}\quad \begin{cases}u=3-v;\\ v^2-3v+2=0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}v=1,\\ v=2,\end{array}\right.\\ u=3-v;\end{cases}\quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}v=1,\\ u=2,\end{cases}\\ \begin{cases}v=2,\\ u=1.\end{cases}\end{array}\right.$$

Тоді:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sqrt{x}=2,\\ \sqrt{y}=1,\end{cases}\\ \begin{cases}\sqrt{x}=1,\\ \sqrt{y}=2;\end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=4,\\ y=1,\end{cases}\\ \begin{cases}x=1,\\ y=4.\end{cases}\end{array}\right.$$

Відповідь. (4; 1); (1; 4).

Приклад 2. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases}2\sqrt{\dfrac{x+y}{2x}}+\sqrt{\dfrac{2x}{x+y}}=3,\\ x=y+3.\end{cases}$$

Розв'язання.

$y=x-3$, тоді $\sqrt{\dfrac{x+y}{2x}}=\sqrt{\dfrac{2x-3}{2x}}$;

$$\sqrt{\frac{2x}{x+y}}=\sqrt{\frac{2x}{2x-3}}.$$

Нехай $\sqrt{\dfrac{2x}{2x-3}}=t>0$,

тоді $\sqrt{\dfrac{2x-3}{2x}}=\dfrac{1}{t}>0$,

$$\frac{2}{t}+t=3; \quad \begin{cases}t^2-3t+2=0,\\ t\neq 0;\end{cases} \quad \left[\begin{array}{l}t_1=2,\\ t_2=1.\end{array}\right.$$

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\sqrt{\dfrac{2x}{2x-3}}=2,\\ \sqrt{\dfrac{2x}{2x-3}}=1,\end{array}\right.\\ y=x-3;\end{cases} \quad \begin{cases}\left[\begin{array}{l}\dfrac{2x}{2x-3}=4,\\ \dfrac{2x}{2x-3}=1,\end{array}\right.\\ y=x-3;\end{cases}$$

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}4(2x-3)=2x,\\ 2x-3=2x,\end{array}\right.\\ y=x-3,\\ x\neq\dfrac{3}{2};\end{cases} \quad \begin{cases}\left[\begin{array}{l}8x-2x=12,\\ 0x=3, \text{ (розв'язку немає)},\end{array}\right.\\ y=x-3,\\ x\neq\dfrac{3}{2};\end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x = 12, \\ y = x - 3, \\ x \neq \dfrac{3}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2, \\ y = -1. \end{cases}$$

Відповідь. (2; –1).

7. Системи показникових і логарифмічних рівнянь

Самовчитель

Приклад 1. Розв'язати систему рівнянь
$$\begin{cases} 3^x \cdot 5^y = 75, \\ 3^y \cdot 5^x = 45. \end{cases}$$

Розв'язання.

Поділимо перше рівняння системи на друге, а потім помножимо:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{3}{5}\right)^x \cdot \left(\dfrac{5}{3}\right)^y = \dfrac{75}{45}, \\ 15^x \cdot 15^y = 15 \cdot 5 \cdot 15 \cdot 3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(\dfrac{3}{5}\right)^x \cdot \left(\dfrac{3}{5}\right)^{-y} = \dfrac{5}{3}, \\ 15^{x+y} = 15^3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(\dfrac{3}{5}\right)^{x-y} = \left(\dfrac{3}{5}\right)^{-1}, \\ x + y = 3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y = -1, \\ x + y = 3; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x = 2, \\ x + y = 3, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1, \\ y = 2. \end{cases}$$

Відповідь. (1; 2).

Приклад 2. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} 3^x \cdot 9^y = 81, \\ \lg(x+y)^2 - \lg y = 2\lg 3. \end{cases}$

Розв'язання.

ОДЗ: $\begin{cases} y > 0, \\ x \neq -y. \end{cases}$

$$\begin{cases} 3^x \cdot 3^{2y} = 3^4, \\ \lg \dfrac{(x+y)^2}{y} = \lg 9; \end{cases} \quad \begin{cases} 3^{x+2y} = 3^4; \\ \dfrac{(x+y)^2}{y} = 9; \end{cases} \quad \begin{cases} x + 2y = 4; \\ (x+y)^2 = 9y; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 4 - 2y; \\ (4 - y)^2 = 9y; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 4 - 2y, \\ 16 - 8y + y^2 - 9y = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 4 - 2y; \\ y^2 - 17y + 16 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} y = 16, \\ y = 1, \end{array}\right. \\ x = 4 - 2y; \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = 16, \\ x = 4 - 2 \cdot 16 = -28, \end{cases} \\ \begin{cases} y = 1, \\ x = 4 - 2 \cdot 1 = 2. \end{cases} \end{array}\right.$$

Відповідь. (–28; 16); (2; 1).

8. Системи тригонометричних рівнянь

Приклад 1. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} \cos x \cos y = \dfrac{1}{3}, \\ \sin x \sin y = \dfrac{2}{3}. \end{cases}$$

Розв'язання.

Почленно додамо і віднімемо ці рівняння. Одержимо рівносильну систему:

$$\begin{cases} \cos(x - y) = 1, \\ \cos(x + y) = -\dfrac{1}{3}, \end{cases} \text{ тоді}$$

$$\begin{cases} x - y = 2\pi n, \ n \in Z \\ x + y = \pm\left(\pi - \arccos\dfrac{1}{3}\right) + 2\pi k, \ k \in Z; \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x - y = 2\pi n, \ n \in Z, \\ x + y = \pi - \arccos\dfrac{1}{3} + 2\pi k, \ k \in Z, \end{cases} \\ \begin{cases} x - y = 2\pi n, \ n \in Z, \\ x + y = -\left(\pi - \arccos\dfrac{1}{3}\right) + 2\pi k, \ k \in Z. \end{cases} \end{array}\right.$$

Додавши почленно рівняння систем, одержимо:

$$\left[\begin{array}{l} 2x = \pi - \arccos\dfrac{1}{3} + 2\pi n + 2\pi k; \ n, k \in Z, \\ 2x = \arccos\dfrac{1}{3} - \pi + 2\pi n + 2\pi k; \ n, k \in Z, \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} 6x = 12, \\ y = x - 3, \\ x \neq \dfrac{3}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2, \\ y = -1. \end{cases}$$

Відповідь. (2; –1).

7. Системи показникових і логарифмічних рівнянь

Самовчитель

Приклад 1. Розв'язати систему рівнянь
$$\begin{cases} 3^x \cdot 5^y = 75, \\ 3^y \cdot 5^x = 45. \end{cases}$$

Розв'язання.

Поділимо перше рівняння системи на друге, а потім помножимо:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{3}{5}\right)^x \cdot \left(\dfrac{5}{3}\right)^y = \dfrac{75}{45}, \\ 15^x \cdot 15^y = 15 \cdot 5 \cdot 15 \cdot 3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(\dfrac{3}{5}\right)^x \cdot \left(\dfrac{3}{5}\right)^{-y} = \dfrac{5}{3}, \\ 15^{x+y} = 15^3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(\dfrac{3}{5}\right)^{x-y} = \left(\dfrac{3}{5}\right)^{-1}, \\ x + y = 3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y = -1, \\ x + y = 3; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x = 2, \\ x + y = 3, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1, \\ y = 2. \end{cases}$$

Відповідь. (1; 2).

Приклад 2. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} 3^x \cdot 9^y = 81, \\ \lg(x+y)^2 - \lg y = 2\lg 3. \end{cases}$

Розв'язання.

ОДЗ: $\begin{cases} y > 0, \\ x \neq -y. \end{cases}$

$$\begin{cases} 3^x \cdot 3^{2y} = 3^4, \\ \lg \dfrac{(x+y)^2}{y} = \lg 9; \end{cases} \quad \begin{cases} 3^{x+2y} = 3^4; \\ \dfrac{(x+y)^2}{y} = 9; \end{cases} \quad \begin{cases} x + 2y = 4; \\ (x+y)^2 = 9y; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 4 - 2y; \\ (4 - y)^2 = 9y; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 4 - 2y, \\ 16 - 8y + y^2 - 9y = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 4 - 2y; \\ y^2 - 17y + 16 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} y = 16, \\ y = 1, \end{array} \right. \\ x = 4 - 2y; \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = 16, \\ x = 4 - 2 \cdot 16 = -28, \end{cases} \\ \begin{cases} y = 1, \\ x = 4 - 2 \cdot 1 = 2. \end{cases} \end{array} \right.$$

Відповідь. (–28; 16); (2; 1).

8. Системи тригонометричних рівнянь

Самовчитель

Приклад 1. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} \cos x \cos y = \dfrac{1}{3}, \\ \sin x \sin y = \dfrac{2}{3}. \end{cases}$$

Розв'язання.

Почленно додамо і віднімемо ці рівняння. Одержимо рівносильну систему:

$$\begin{cases} \cos(x - y) = 1, \\ \cos(x + y) = -\dfrac{1}{3}, \end{cases} \text{ тоді}$$

$$\begin{cases} x - y = 2\pi n,\ n \in Z \\ x + y = \pm\left(\pi - \arccos\dfrac{1}{3}\right) + 2\pi k,\ k \in Z; \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x - y = 2\pi n,\ n \in Z, \\ x + y = \pi - \arccos\dfrac{1}{3} + 2\pi k,\ k \in Z, \end{cases} \\ \begin{cases} x - y = 2\pi n,\ n \in Z, \\ x + y = -\left(\pi - \arccos\dfrac{1}{3}\right) + 2\pi k,\ k \in Z. \end{cases} \end{array} \right.$$

Додавши почленно рівняння систем, одержимо:

$$\left[\begin{array}{l} 2x = \pi - \arccos\dfrac{1}{3} + 2\pi n + 2\pi k;\ n, k \in Z, \\ 2x = \arccos\dfrac{1}{3} - \pi + 2\pi n + 2\pi k;\ n, k \in Z, \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{aligned} &x = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\arccos\frac{1}{3} + \pi n + \pi k;\ n, k \in Z,\\ &x = \frac{1}{2}\arccos\frac{1}{3} - \frac{\pi}{2} + \pi n + \pi k;\ n, k \in Z.\end{aligned}\right.$$

Тоді

$$\left[\begin{aligned} &y = x - 2\pi n = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\arccos\frac{1}{3} + \pi k - \pi n,\ n, k \in Z,\\ &y = \frac{1}{2}\arccos\frac{1}{3} - \frac{\pi}{2} + \pi k - \pi n,\ n, k \in Z.\end{aligned}\right.$$

Відповідь. $\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\arccos\frac{1}{3} + \pi n + \pi k;\ \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\arccos\frac{1}{3} + \pi k - \pi n\right);$

$\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{3} - \frac{\pi}{2} + \pi n + \pi k;\ \frac{1}{2}\arccos\frac{1}{3} - \frac{\pi}{2} + \pi k - \pi n\right),\ n, k \in Z.$

Приклад 2. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} \sin^2 x + \cos^2 y = \dfrac{1}{2},\\ x + y = \dfrac{\pi}{4}.\end{cases}$$

Розв'язання.

$$\begin{cases} \dfrac{1 - \cos 2x}{2} + \dfrac{1 + \cos 2y}{2} = \dfrac{1}{2},\\ x + y = \dfrac{\pi}{4};\end{cases} \quad \begin{cases} \cos 2y - \cos 2x = -1,\\ x + y = \dfrac{\pi}{4};\end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\sin(x + y)\sin(x - y) = -1;\\ x + y = \dfrac{\pi}{4};\end{cases} \quad \begin{cases} \sin(x - y) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2},\\ x + y = \dfrac{\pi}{4};\end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y = (-1)^{n+1}\cdot\dfrac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z,\\ x + y = \dfrac{\pi}{4},\end{cases} \quad \text{тоді}$$

$$2x = (-1)^{n+1}\cdot\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z;$$

$$x = (-1)^{n+1}\cdot\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2},\ n \in Z;$$

$$y = \frac{\pi}{4} - (-1)^{n+1}\cdot\frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{8} - \frac{\pi n}{2} = \frac{\pi}{8} - (-1)^{n+1}\cdot\frac{\pi}{8} - \frac{\pi n}{2},\ n \in Z.$$

Відповідь. $\left(\frac{\pi}{8}\left(1 + (-1)^{n+1}\right) + \frac{\pi n}{2},\ \frac{\pi}{8}\left(1 - (-1)^{n+1}\right) - \frac{\pi n}{2},\ n \in Z.\right.$

Приклад 3. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} \sin y = 5\sin x,\\ 3\cos x + \cos y = 2.\end{cases}$

Розв'язання.

$$\begin{cases} \sin y = 5\sin x,\\ \cos y = 2 - 3\cos x;\end{cases} \quad \begin{cases} \sin^2 y = 25\sin^2 x,\\ \cos^2 y = 4 - 12\cos x + 9\cos^2 x.\end{cases}$$

Додавши почленно рівняння системи, одержимо:

$1 = 25\sin^2 x + 4 - 12\cos x + 9\cos^2 x;$

$25\left(1 - \cos^2 x\right) - 12\cos x + 9\cos^2 x + 3 = 0;$

$16\cos^2 x + 12\cos x - 28 = 0.$

Нехай $\cos x = t$, тоді $16t^2 + 12t - 28 = 0;$

$4t^2 + 3t - 7 = 0;$

$D = 9 + 112 = 121;$

$t_1 = \dfrac{-3 + 11}{8} = 1;\quad t_2 = \dfrac{-3 - 11}{8} = -\dfrac{14}{8} = -\dfrac{7}{4}.$

$$\left[\begin{aligned} &\cos x = 1,\\ &\cos x = -\frac{7}{4}\ \text{(рівняння розв'язків не має).}\end{aligned}\right.$$

$$\begin{cases} x = 2\pi n,\ n \in Z,\\ \cos y = -1;\end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2\pi n,\ n \in Z,\\ y = \pi + 2\pi k,\ k \in Z.\end{cases}$$

Відповідь. $(2\pi n;\ \pi(2k + 1));\ n, k \in Z.$

Вправи для самостійного розв'язування

Перевір себе

Розв'язати системи рівнянь:

1) $\begin{cases} x - 2y = 4,\\ 2x - 5y = 8;\end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x + 4y = -5,\\ 5x - 3y = 11;\end{cases}$

3) $\begin{cases} 0,7x - 0,3y = 1,2,\\ -2x + 5y = 9;\end{cases}$ 4) $\begin{cases} 3(x - 2y) + 2(x - y) = 2,\\ 5(x - 2y) + 3(x - y) = 4;\end{cases}$

5) $\begin{cases} \dfrac{x-2y}{3}+3=\dfrac{3x-y}{5}, \\ \dfrac{2(3x-y)}{3}=\dfrac{x-2y}{2}+10; \end{cases}$

6) $\begin{cases} 3x^2+2xy+y=9, \\ x+y+1=0; \end{cases}$ 7) $\begin{cases} x^2-3xy-2y^2=8, \\ x-2y=4; \end{cases}$

8) $\begin{cases} x+y=4, \\ \dfrac{5}{x}-\dfrac{3}{y}=1; \end{cases}$ 9) $\begin{cases} x^2+y^2=25, \\ x^2-y^2=7; \end{cases}$

10) $\begin{cases} x^2+y^2=26, \\ xy=5; \end{cases}$ 11) $\begin{cases} x^2+xy=10, \\ x^2-xy=-2; \end{cases}$

12) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{7}{12}, \\ x+y=7; \end{cases}$ 13) $\begin{cases} x^2y+xy^2=6, \\ xy+x+y=5; \end{cases}$

14) $\begin{cases} \dfrac{1}{x^2+y^2}+2xy=\dfrac{21}{5}, \\ \dfrac{1}{2xy}+x^2+y^2=\dfrac{21}{4}; \end{cases}$ 15) $\begin{cases} x^2+y^2=8, \\ \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=\dfrac{1}{2}; \end{cases}$

16) $\begin{cases} 5\sqrt{x^2-3y-1}+\sqrt{x+6y}=19, \\ 3\sqrt{x^2-3y-1}=1+2\sqrt{x+6y}; \end{cases}$

17) $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=5, \\ x-y=5; \end{cases}$ 18) $\begin{cases} \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=3, \\ x+y=9; \end{cases}$

19) $\begin{cases} \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=5, \\ \sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}=7; \end{cases}$ 20) $\begin{cases} x^2-2xy-y=3, \\ 2xy-x^2+3y-5x=6; \end{cases}$

21) $\begin{cases} x^2+xy=51, \\ xy-y^2=-12; \end{cases}$ 22) $\begin{cases} x^2-xy+y^2=19, \\ 2xy-y^2=-5; \end{cases}$

23) $\begin{cases} 2x^2-xy+y^2=11, \\ x^2+7xy-3y^2=19; \end{cases}$ 24) $\begin{cases} x^3+y^3=19, \\ (xy+8)(x+y)=2; \end{cases}$

25) $\begin{cases} x^2+2y=6x, \\ y^3+2x=6y; \end{cases}$ 26) $\begin{cases} 2\cdot 3^x=18, \\ 4^x\cdot 5^y=16; \end{cases}$

27) $\begin{cases} 2^x + 3^y = 17, \\ 2^{x+2} - 3^{y+1} = 5; \end{cases}$ 28) $\begin{cases} \lg x + \lg y = \lg 2, \\ x^2 + y^2 = 5; \end{cases}$

29) $\begin{cases} \log_2(x+y) = 2, \\ \log_3(x-y) = 2; \end{cases}$ 30) $\begin{cases} \dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x} = \dfrac{5}{6}; \\ \log_5(x-y) + \log_5(x+y) = 1; \end{cases}$

31) $\begin{cases} 3^{2\sqrt{x}-\sqrt{y}} = 81, \\ \lg\sqrt{xy} = 1 + \lg 3; \end{cases}$ 32) $\begin{cases} \sin x + \sin y = 1, \\ x + y = \pi; \end{cases}$

33) $\begin{cases} \cos x \cos y = 0,75, \\ \sin x \sin y = 0,25; \end{cases}$ 34) $\begin{cases} \sin x \cos y = 0,75, \\ \sin y \cos x = 0,25; \end{cases}$

35) $\begin{cases} \cos x + \cos y = \dfrac{1}{2}, \\ \sin^2 y + \sin^2 x = \dfrac{7}{4}. \end{cases}$

РОЗДІЛ 3. НЕРІВНОСТІ ТА СИСТЕМИ НЕРІВНОСТЕЙ

§ 1. Лінійні нерівності та нерівності другого степеня з однією змінною. Метод інтервалів

Це треба знати!

Лінійні нерівності

Нерівності виду $ax > b$, $ax \geq b$, $ax < b, ax \leq b$, де a і b — деякі відомі числа, x — змінна, називаються ***лінійними нерівностями з однією змінною***.

Якщо $a \neq 0$, то для розв'язання лінійної нерівності з однією змінною потрібно поділити обидві частини нерівності на a. При цьому, якщо $a > 0$, то знак нерівності зберігається; якщо $a < 0$, то знак нерівності змінюється на протилежний.

Якщо $a = 0$, то або розв'язком нерівності є будь-яке число $(0x < 5)$, або нерівність розв'язків не має $(0x > 5)$.

Самовчитель

Приклад 1. Розв'язати нерівності:

а) $3(5 + x) > 11 + 8(x - 2)$;

б) $y - 7(y + 1) \leq 5 - 6(y + 2)$.

Розв'язання.

а) $15 + 3x > 11 + 8x - 16$;

$3x - 8x > 11 - 16 - 15$;

$-5x > -20$; $x < 4$ (рис. 15).

Рис. 15

Відповідь. $x \in (-\infty; 4)$.

б) $y - 7y - 7 \leq 5 - 6y - 12$;

$y - 7y + 6y \leq 5 - 12 + 7$; $0y \leq 0$.

Відповідь. y — будь-яке число.

Приклад 2. Розв'язати нерівності:

а) $x - \dfrac{x+3}{2} \geq \dfrac{2x-1}{4}$; б) $\dfrac{y+1}{2} + \dfrac{2y-1}{6} \leq y$.

Розв'язання.

а) $x - \dfrac{x+3}{2} \geq \dfrac{2x-1}{4}$.

Помножимо обидві частини нерівності на 4:

$4x - 2(x + 3) \geq 2x - 1$; $4x - 2x - 6 \geq 2x - 1$;

$4x - 2x - 2x \geq -1 + 6$; $0x \geq 5$.

Відповідь. Нерівність розв'язків не має.

б) $\dfrac{y+1}{2} + \dfrac{2y-1}{6} \leq y$.

Помножимо обидві частини нерівності на 6:

$3(y + 1) + 2y - 1 \leq 6y$; $3y + 3 + 2y - 1 \leq 6y$;

$3y + 2y - 6y \leq 1 - 3$;

$-y \leq -2$; $y \geq 2$ (рис. 16).

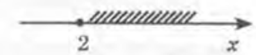


Рис. 16

Відповідь. $y \in [2; +\infty)$.

Розв'язування нерівностей методом інтервалів

Це треба знати!

Для того щоб розв'язати нерівність $f(x) > 0$; $(f(x) < 0)$ методом інтервалів, треба:

1) знайти область визначення функції $y = f(x)$;
2) знайти нулі функції $f(x) = 0$;
3) на числовій прямій в області визначення функції нанести нулі функції;
4) дослідити знак $y = f(x)$ у кожному з отриманих інтервалів;
5) записати відповідь.

Самовчитель

Приклад 1. Розв'язати нерівність

$(2x - 1)(x + 2)(x - 1) < 0$.

Розв'язання.

Розглянемо функцію $y = (2x - 1)(x + 2)(x - 1)$,

$D(y) = (-\infty; +\infty)$.

Знайдемо нулі функції $(2x - 1)(x + 2)(x - 1) = 0$;

$$\left[\begin{array}{l} 2x - 1 = 0, \\ x + 2 = 0, \\ x - 1 = 0; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{2}, \\ x = -2, \\ x = 1. \end{array}\right.$$

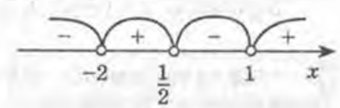


Рис. 17

Нанесемо на числову пряму область визначення та нулі функції (рис. 17).

Визначимо знак функції на кожному інтервалі:

$y(-3) = (2(-3) - 1)(-3 + 2)(-3 - 1) < 0$;

$y(0) = (2 \cdot 0 - 1)(0 + 2)(0 - 1) > 0$;

$y(0{,}6) = (2 \cdot 0{,}6 - 1)(0{,}6 + 2)(0{,}6 - 1) < 0$;

$y(2) = (2 \cdot 2 - 1)(2 + 2)(2 - 1) > 0$.

Отже, $y < 0$, якщо $x \in (-\infty; -2) \cup \left(\frac{1}{2}; 1\right)$.

Відповідь: $x \in (-\infty; -2) \cup \left(\frac{1}{2}; 1\right)$.

Приклад 2. Розв'язати нерівність $\frac{3-x}{2x+3} \le 4$.

Розв'язання.

$\frac{3-x}{2x+3} - 4 \le 0$; $\frac{3-x-4(2x+3)}{2x+3} \le 0$;

$\frac{3-x-8x-12}{2x+3} \le 0$; $\frac{-9x-9}{2x+3} \le 0$;

Розглянемо функцію $y = \frac{-9x-9}{2x+3}$,

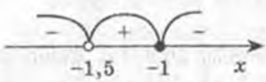


Рис. 18

$D(y) = (-\infty; -1,5) \cup (-1,5; +\infty)$.

Знайдемо нулі функції:

$\frac{-9x-9}{2x+3} = 0$; $\begin{cases} -9x-9=0, \\ 2x+3 \ne 0; \end{cases}$ $-9x = 9$; $x = -1$.

Нанесемо на числову пряму область визначення та нулі функції (рис. 18). Визначимо знак функції на кожному інтервалі:

$y(-2) = \frac{-9 \cdot (-2) - 9}{2 \cdot (-2) + 3} < 0$;

$y(-1,2) = \frac{-9 \cdot (-1,2) - 9}{2 \cdot (-1,2) + 3} > 0$; $y(0) = \frac{-9 \cdot 0 - 9}{2 \cdot 0 + 3} < 0$.

Отже, $\frac{-9x-9}{2x+3} \le 0$, якщо $x \in (-\infty; -1,5) \cup [-1; +\infty)$.

Відповідь. $x \in (-\infty; -1,5) \cup [-1; +\infty)$.

Це треба знати!

Нерівності другого степеня з однією змінною

Нерівності виду $ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c < 0$, $ax^2 + bx + c \ge 0$, $ax^2 + bx + c \le 0$, де x — змінна, a, b, c — деякі числа, причому $a \ne 0$, називаються ***нерівностями другого степеня з однією змінною (або квадратними нерівностями)***.

Самовчитель

Приклад 1. Розв'язати нерівність $-x^2 + 3x - 10 \le 0$.

Розв'язання.

Розглянемо функцію $y = -x^2 + 3x - 10$, $D(y) = (-\infty; +\infty)$.

Графіком даної функції є парабола, вітки якої напрямлені вниз. Знайдемо нулі функції:

$-x^2 + 3x - 10 = 0;\quad x^2 - 3x + 10 = 0.$

$D = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10 = -40 < 0.$

Отже, функція $y = -x^2 + 3x - 10$ нулів не має. Побудуємо схематично графік цієї функції (рис. 19).

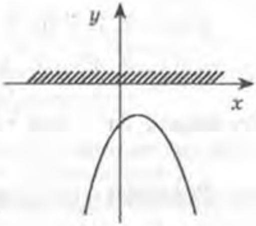


Рис. 19

Дана функція набуває від'ємних значень на всій числовій прямій. Отже, $-x^2 + 3x - 10 \le 0$, якщо $x \in (-\infty; +\infty)$.

Відповідь. $x \in (-\infty; +\infty)$.

Приклад 2. Розв'язати нерівність $x^2 > 4$.

Розв'язання.

$x^2 - 4 > 0.$

Розглянемо функцію $y = x^2 - 4$, $D(y) = (-\infty; +\infty)$. Графіком даної функції є парабола, вітки якої напрямлені вгору. Знайдемо нулі функції: $x^2 - 4 = 0$;

$\left[\begin{array}{l} x = -2, \\ x = 2. \end{array}\right.$

Побудуємо схематично графік цієї функції (рис. 20). Отже, $x^2 - 4 > 0$,

якщо $x \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$.

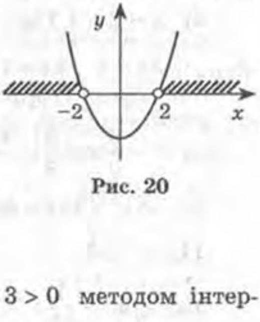


Рис. 20

Відповідь. $x \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$.

Приклад 3. Розв'язати нерівність $3x^2 - 10x + 3 > 0$ методом інтервалів.

Розв'язання.

Розглянемо функцію $y = 3x^2 - 10x + 3$, $D(y) = (-\infty; +\infty)$.

Знайдемо нулі функції:

$3x^2 - 10 + 3x = 0;$

$D = 100 - 36 = 64 > 0;$

$x_1 = \dfrac{10 + 8}{6} = \dfrac{18}{6} = 3;$

$x_2 = \dfrac{10 - 8}{6} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}.$

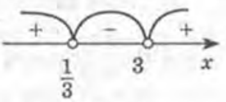


Рис. 21

Нанесемо на координатну пряму область визначення та нулі функції (рис. 21).

Визначимо знак функції на кожному інтервалі:

$y(0) = 3 \cdot 0^2 - 10 \cdot 0 + 3 = 3 > 0;$

$y(1) = 3 \cdot 1^2 - 10 \cdot 1 + 3 = -4 < 0;$

$y(4) = 3 \cdot 4^2 - 10 \cdot 4 + 3 = 11 > 0.$

Отже, $3x^2 - 10x + 3 > 0$, якщо $x \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \cup (3; +\infty)$.

Відповідь. $x \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \cup (3; +\infty)$.

Самовчитель

Вправи для самостійного розв'язування

Розв'язати нерівності:

1) $5(x-1) + 7 \le 1 - 3(x+2);$

2) $a + 2 < 5(2a+8) + 13(4-a);$

3) $2,5(2-y) - 1,5(y-4) \le 3 + y;$

4) $x - 2 \ge 4,7(x-2) - 2,7(x-1);$

5) $\frac{5x-1}{4} - \frac{3x-13}{10} < \frac{5x+1}{3};$

6) $x - \frac{2x+3}{2} \le \frac{x-1}{4};$

7) $3 - \frac{3}{2}x > \frac{5}{8} - \frac{4x-3}{6};$

8) $x^2 + 2x - 48 < 0;$

9) $-5x^2 + 11x - 6 > 0;$

10) $x^2 \le 16;$

11) $x^2 \ge 3;$

12) $3x^2 < -2x;$

13) $\frac{1}{3}x^2 > \frac{1}{27};$

14) $(2x+3)(x-8) \ge 0;$

15) $(0,5-x)(x+2,5) \le 0;$

16) $(x-3)(x-7) < 5(x+3);$

17) $\frac{4-x}{1+2x} > 0;$

18) $\frac{7-x}{8+x} < 0;$

19) $\frac{5x-1}{x+6} \le 1;$

20) $\frac{2x+1}{x+2} > 1;$

21) $\frac{(2-x)(x+5)}{x+3} > 0;$

22) $\frac{1}{x+2} < \frac{3}{x-3};$

23) $-2 + x - 3x^2 < 0;$

24) $x^2 + 9 \le 6x;$

25) $-9x^2 + 24x + 20 > 0;$

26) $|x+3| \ge 4;$

27) $|x-1|<5$; 28) $|2x-3|<4$;

29) $|5-8x|<11$; 30) $|x+2|+|x-3|>x+5$.

§ 2. Тригонометричні нерівності

Самовчитель

Приклад 1. Розв'язати нерівність

$$\cos x > -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Розв'язання.

Оскільки $\cos x$ — це абсциса відповідної точки P_x одиничного кола, то заштрихуємо всередині одиничного кола на осі абсцис проміжок, який лежить праворуч від $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (рис 22).

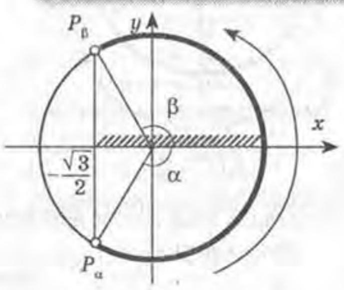


Рис. 22

Знайдемо дугу, яка відповідає даному проміжку: P_α — початок дуги, P_β — кінець дуги.

Для того щоб визначити, де початок дуги, а де кінець, домовимося обходити дугу з початку до кінця проти годинникової стрілки. При цьому необхідно, щоб виконувалась нерівність $\alpha<\beta$.

Тоді $\beta = \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \pi - \arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$;

$\alpha = -\frac{5\pi}{6}$.

Отже, $\alpha + 2\pi n < x < \beta + 2\pi n,\ n \in Z$;

$$-\frac{5\pi}{6} + 2\pi n < x < \frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z.$$

Відповідь. $x \in \left(-\frac{5\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi n\right),\ n \in Z.$

Приклад 2. Розв'язати нерівність $\sin x < -\frac{1}{2}$.

Розв'язання.

Оскільки $\sin x$ — це ордината відповідної точки P_x одиничного кола, то заштрихуємо всередині одиничного кола на осі ординат проміжок, який лежить нижче від $-\frac{1}{2}$ (рис. 23).

Знаходимо дугу, яка відповідає даному проміжку: P_α — початок дуги, P_β — кінець дуги $(\alpha < \beta)$.

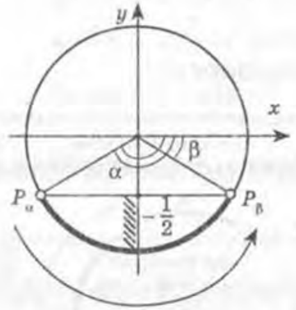


Рис. 23

Тоді

$$\beta = \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\arcsin\frac{1}{2} = -\frac{\pi}{6};$$

$$\alpha = -\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{5\pi}{6}; \text{ отже,}$$

$$\alpha + 2\pi n < x < \beta + 2\pi n,\ n \in Z;$$

$$-\frac{5\pi}{6} + 2\pi n < x < -\frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z.$$

Відповідь.

$$x \in \left(-\frac{5\pi}{6} + 2\pi n; -\frac{\pi}{6} + 2\pi n\right),\ n \in Z.$$

Приклад 3. Розв'язати нерівність $\operatorname{tg} 2x \le -1$.

Розв'язання.

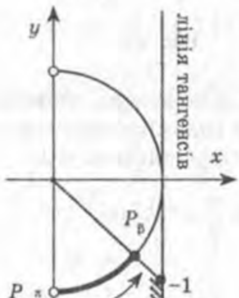


Рис. 24

Нанесемо на лінію тангенсів (рис. 24) точку -1 і точки, що лежать нижче цієї точки. Цим точкам лінії тангенсів відповідає дуга $P_\alpha P_\beta$ $(\alpha < \beta)$ одиничного кола.

Оскільки $\alpha = -\frac{\pi}{2}$, а

$$\beta = \operatorname{arctg}(-1) = -\operatorname{arctg} 1 = -\frac{\pi}{4},$$

то $-\frac{\pi}{2} + \pi n < 2x \le \beta + \pi n,\ n \in Z;$

$$-\frac{\pi}{2} + \pi n < 2x \le -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z;$$

$$-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} n < x \le -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} n,\ n \in Z.$$

Відповідь. $x \in \left(-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} n; -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} n\right),\ n \in Z.$

Приклад 4. Розв'язати нерівність $\operatorname{ctg} x > -\sqrt{3}$.

Розв'язання.

Нанесемо на лінію котангенсів (рис. 25) точку $-\sqrt{3}$ і точки лінії котангенсів, які лежать праворуч цієї точки.

Цим точкам лінії котангенсів відповідає дуга P_0P_β одиничного кола.

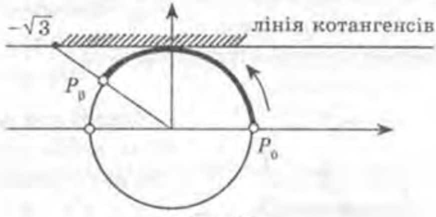


Рис. 25

Оскільки

$$\beta = \operatorname{arcctg}\left(-\sqrt{3}\right) = \pi - \operatorname{arcctg}\sqrt{3} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6},$$

то $\pi n < x < \dfrac{5\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z.$

Відповідь. $x \in \left(\pi n; \dfrac{5\pi}{6} + \pi n\right),\ n \in Z.$

Перевір себе

Вправи для самостійного розв'язування

Розв'язати нерівності:

1) $\sin 3x > -\dfrac{1}{2}$;
2) $\sin 2x \le -\dfrac{1}{2}$;
3) $\cos 2x \le -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$;
4) $\cos 2x > -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$;
5) $\sin\left(2x + \dfrac{\pi}{6}\right) < \dfrac{\sqrt{3}}{2}$;
6) $\operatorname{tg} 2x \ge \sqrt{3}$;
7) $\operatorname{ctg}\dfrac{x}{2} < \dfrac{\sqrt{3}}{3}$;
8) $\sin^2 x > \dfrac{1}{4}$;
9) $\cos^2 \le \dfrac{1}{4}$;
10) $\operatorname{tg}\dfrac{x}{4} \ge 5$.

§ 3. Системи нерівностей

Це треба знати!

Розв'язком ***системи нерівностей з однією змінною*** називається значення змінної, при якому правильна кожна із нерівностей системи.

Розв'язати нерівність означає знайти всі її розв'язки або довести, що їх немає.

Для того щоб розв'язати систему нерівностей, треба:

1) розв'язати кожну нерівність системи;
2) зобразити множину розв'язків кожної нерівності на одній координатній прямій;
3) знайти спільні розв'язки нерівностей.

Самовчитель

Приклад 1. Розв'язати систему нерівностей: $\begin{cases} x^2 + x - 6 < 0, \\ -x^2 + 2x + 3 > 0. \end{cases}$

Розв'язання.

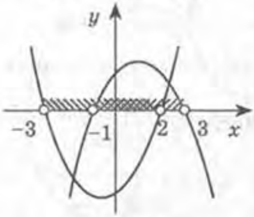


Рис. 26

Графіком функції $y = x^2 + x - 6$ є парабола, вітки якої напрямлені вгору (рис. 26). Знайдемо нулі даної функції:

$x^2 + x - 6 = 0$; $x_1 = -3$; $x_2 = 2$.

Отже, $x^2 + x - 6 < 0$, якщо $x \in (-3; 2)$ (рис. 26).

Графіком функції $y = -x^2 + 2x + 3$ є парабола, вітки якої напрямлені вниз (рис. 26). Знайдемо нулі цієї функції:

$-x^2 + 2x + 3 = 0$;

$x^2 - 2x - 3 = 0$; $x_1 = 3$, $x_2 = -1$.

Отже, $-x^2 + 2x + 3 > 0$, якщо $x \in (-1; 3)$ (рис. 26).

Тоді розв'язком є проміжок $(-1; 2)$.

Відповідь. $x \in (-1; 2)$.

Приклад 2. Розв'яжіть подвійну нерівність:

а) $-11 < \dfrac{2 - 3y}{2} \le -8$;

б) $-1 \le \dfrac{1}{2a} \le 1$.

Розв'язання.

а) Дана нерівність рівносильна системі нерівностей:

$$\begin{cases} \dfrac{2 - 3y}{2} \le -8, \\ \dfrac{2 - 3y}{2} > -11. \end{cases}$$

Розв'яжемо систему:

$$\begin{cases} 2 - 3y \le -16, \\ 2 - 3y > -22; \end{cases} \begin{cases} -3y \le -16 - 2, \\ -3y > -22 - 2; \end{cases} \begin{cases} -3y \le -18, \\ -3y > -24; \end{cases}$$

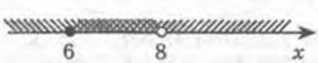


Рис. 27

$$\begin{cases} y \ge 6, \\ y < 8. \end{cases}$$

Отже, розв'язком нерівності є проміжок $[6; 8)$ (рис. 27).

Відповідь. $x \in [6; 8)$.

б) Дана подвійна нерівність рівносильна системі нерівностей:

$$\begin{cases}\dfrac{1}{2a}\le 1,\\ \dfrac{1}{2a}\ge -1,\end{cases}\quad \text{тоді}\quad \begin{cases}\dfrac{1}{2a}-1\le 0,\\ \dfrac{1}{2a}+1\ge 0;\end{cases}\quad \begin{cases}\dfrac{1-2a}{2a}\le 0,\\ \dfrac{1+2a}{2a}\ge 0.\end{cases}$$

Скористаємося методом інтервалів для розв'язування першої нерівності.

Знайдемо нулі та область визначення функції $y=\dfrac{1-2a}{2a}$:

$$\frac{1-2a}{2a}=0;\quad \begin{cases}1-2a=0;\\ a\ne 0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}2a=1,\\ a\ne 0;\end{cases}\quad \begin{cases}a=0,5,\\ a\ne 0.\end{cases}$$

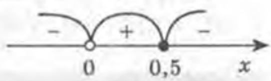


Рис. 28

Визначимо знаки функції на утворених проміжках (рис. 28).

Отже, $x\in(-\infty;\,0)\cup[0,5;\,+\infty)$.

Знайдемо нулі та область визначення функції $y=\dfrac{1+2a}{2a}$:

$$\frac{1+2a}{2a}=0;\quad \begin{cases}1+2a=0,\\ a\ne 0;\end{cases}\quad \begin{cases}2a=-1,\\ a\ne 0;\end{cases}\quad \begin{cases}a=-0,5,\\ a\ne 0.\end{cases}$$

Визначимо знак функції на утворених проміжках (рис. 29):

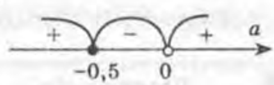


Рис. 29

Отже, $x\in(-\infty;\,-0,5]\cup(0;\,+\infty)$.

Розв'язком є: $\begin{cases}x\in(-\infty;\,0)\cup[0,5;\,+\infty),\\ x\in(-\infty;\,-0,5]\cup(0;\,+\infty)\end{cases}$

або $x\in(-\infty;\,-0,5]\cup[-0,5;\,+\infty)$

(рис. 30).

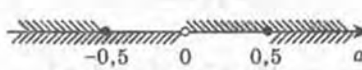


Рис. 30

Відповідь.

$x\in(-\infty;\,-0,5]\cup[-0,5;\,+\infty)$.

Приклад 3. Розв'язати нерівність $|x+1|+|x-2|<6$.

Розв'язання.

Знайдемо нулі модулей, які входять у нерівність:

$x+1=0$ або $x-2=0$;

$x=-1$ або $x=2$.

Рис. 31

Розглянемо нерівність на трьох утворених проміжках (рис. 31).

1) $x \in (-\infty; -1)$, тоді $-(x+1)-(x-2)<6$;
$-x-1-x+2<6$; $-2x<5$; $x>-2{,}5$.

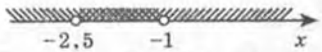


Рис. 32

Отже, система $\begin{cases} x>-2{,}5, \\ x<-1; \end{cases}$ має розв'язок, якщо $x \in (-2{,}5; -1)$ (рис. 32).

2) $x \in [-1; 2)$, тоді $x+1-(x-2)<6$; $x+1-x+2<6$; $0x<3$; x — будь-яке.

Отже, $[-1; 2)$ є розв'язком заданої нерівності.

3) $x \in [2; +\infty)$, тоді $x+1+x-2<6$; $2x<7$; $x<3{,}5$.

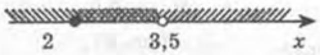


Рис. 33

Отже, система $\begin{cases} x<3{,}5, \\ x\ge 2; \end{cases}$ має розв'язок, якщо $x \in [2; 3{,}5)$ (рис. 33).

Розв'язком даної нерівності є
$\left[\begin{array}{l} x \in (-2{,}5; -1), \\ x \in [2; 3{,}5), \\ x \in [-1; 2), \end{array}\right.$ або $x \in (-2{,}5; 3{,}5)$.

Відповідь. $x \in (-2{,}5; 3{,}5)$.

Перевір себе

Вправи для самостійного розв'язування

Розв'язати систему нерівностей:

1) $\begin{cases} 5x+4\ge 2, \\ 3-2x<4; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3-4x>5, \\ 6+9x\le 1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 7x+3\ge 5(x-4)+1, \\ 4x+1\le 43-3(7+x); \end{cases}$

4) $\begin{cases} \dfrac{x+5}{2}-\dfrac{x-3}{3}\le 8, \\ \dfrac{x+2}{3}+\dfrac{x-1}{4}\ge 11; \end{cases}$

5) $\begin{cases} \dfrac{3x-7}{4}\le \dfrac{2x-3}{5}+1, \\ \dfrac{2x+3}{2}+1>x-2; \end{cases}$

6) $\begin{cases} 4x+\dfrac{15-x}{4}\le 2x+5+\dfrac{7x+11}{16}, \\ 3x-\dfrac{2x+1}{5}>2x+\dfrac{2x+4}{3}; \end{cases}$

7) $\begin{cases} \dfrac{x-1}{2}-\dfrac{2x+3}{3}+\dfrac{x}{6}<2-\dfrac{x+5}{2}, \\ 1-\dfrac{x+5}{8}+\dfrac{4-x}{2}<3x-\dfrac{x+1}{4}; \end{cases}$

8) $\begin{cases} 4x^2-27x-7>0, \\ x>0; \end{cases}$

9) $\begin{cases} x^2+x-6<0, \\ -x^2+2x+3>0; \end{cases}$

10) $-2\le \dfrac{3x+1}{8}\le 0$;

11) $-0{,}2\le \dfrac{5x+2}{4}\le 2$.

§ 4. Ірраціональні, показникові, логарифмічні нерівності. Нерівності з параметрами

1. Ірраціональні нерівності

Це треба знати!

Нерівність виду $\sqrt[2n]{f(x)}>g(x)$, $n \in N$ рівносильна сукупності систем $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x)<0, \\ f(x)\ge 0; \end{cases} \\ \begin{cases} g(x)\ge 0, \\ f(x)>g^{2n}(x). \end{cases} \end{array}\right.$

Нерівність виду $\sqrt[2n]{f(x)}<g(x)$, $n \in N$ рівносильна системі $\begin{cases} g(x)>0, \\ f(x)\ge 0, \\ f(x)<g^{2n}(x). \end{cases}$

Нерівність виду $\sqrt[2n+1]{f(x)}<g(x)$, $n \in N$ рівносильна нерівності $f(x)<(g(x))^{2n+1}$.

Нерівність виду $\sqrt[2n+1]{f(x)}>g(x)$, $n \in N$ рівносильна нерівності $f(x)>(g(x))^{2n+1}$.

Самовчитель

Приклад 1. Розв'язати нерівність $\sqrt{3x+19} > x+3$.

Розв'язання.

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+3<0,\\3x+19\ge 0;\end{cases}\\ \begin{cases}x+3\ge 0,\\3x+19>(x+3)^2;\end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<-3,\\x\ge -\dfrac{19}{3};\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge -3,\\3x+19>x^2+6x+9;\end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<-3,\\x\ge -\dfrac{19}{3};\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge -3,\\x^2+3x-10<0.\end{cases}\end{array}\right.$$

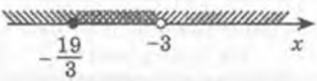


Рис. 34

Розв'язком першої системи є проміжок $\left[-\dfrac{19}{5};-3\right)$ (рис. 34).

Розв'яжемо другу систему.

Графіком функції $y=x^2+3x-10$ є парабола, вітки якої напрямлені вгору.

Знайдемо нулі функції:

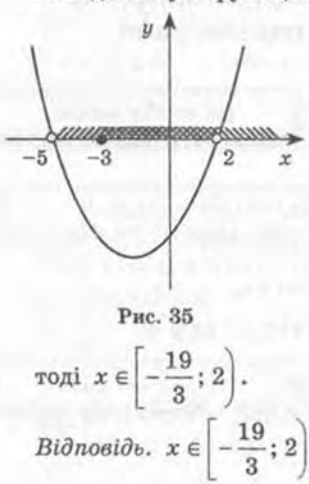


Рис. 35

$x^2+3x-10=0;$
$x_1=2;\ x_2=-5.$

Отже, розв'язком другої системи є числа з проміжку $[-3;\,2)$ (рис. 35).

Тоді розв'язки даної нерівності знаходимо як сукупність розв'язків двох систем:

$$\left[\begin{array}{l}x\in[-3;\,2),\\ x\in\left[-\dfrac{19}{3};-3\right),\end{array}\right.$$

тоді $x\in\left[-\dfrac{19}{3};\,2\right)$.

Відповідь. $x\in\left[-\dfrac{19}{3};\,2\right)$.

Приклад 2. Розв'язати нерівність $\sqrt{x^2-x-12}<x$.

Розв'язання.

$$\begin{cases}x>0;\\x^2-x-12\ge 0,\\x^2-x-12<x^2;\end{cases} \quad \begin{cases}x>0,\\x^2-x-12\ge 0,\\-x-12<0;\end{cases} \quad \begin{cases}x>0,\\x^2-x-12\ge 0,\\x>-12.\end{cases}$$

Розв'яжемо утворену систему.

Графіком функції $y = x^2 - x - 12$ є парабола, вітки якої напрямлені вгору. Знайдемо нулі функції:

$x^2 - x - 12 = 0$. $x_1 = -3$; $x_2 = 4$.

Отже, $x^2 - x - 12 \geq 0$,

якщо $x \in (-\infty; 3] \cup [4; +\infty)$ (рис. 36)

Тоді (рис. 36) розв'язком даної нерівності є числа з проміжку $[4; +\infty)$.

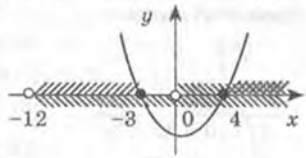


Рис. 36

Відповідь. $x \in [4; +\infty)$.

2. Показникові нерівності

Це треба знати!

Розв'язання показникових нерівностей ґрунтується на тому, що показникова функція $y = a^x$, при $a > 1$ зростає, а при $0 < a < 1$ спадає. Отже, показникова нерівність $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ рівносильна сукупності систем

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) > g(x), \\ a > 1; \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) < g(x), \\ 0 < a < 1. \end{cases} \end{array}\right.$$

Показникова нерівність $a^{f(x)} < a^{g(x)}$ рівносильна сукупності систем

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) < g(x), \\ a > 1; \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) > g(x), \\ 0 < a < 1. \end{cases} \end{array}\right.$$

Самовчитель

Приклад 1. Розв'язати нерівність

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-3x-4} \geq 4^{x+1}.$$

Розв'язання.

$2^{-(x^2-3x-4)} \geq 2^{2(x+1)}$;

Оскільки функція $y = 2^t$ зростає, то $-(x^2 - 3x - 4) \geq 2(x+1)$;

$-x^2 + 3x + 4 \geq 2x + 2$;

$-x^2 + 3x - 2x \geq 2 - 4$;

$-x^2 + x + 2 \geq 0$.

Розв'яжемо утворену нерівність.

Графіком функції $y = -x^2 + x + 2$ є парабола, вітки якої напрямлені вниз.

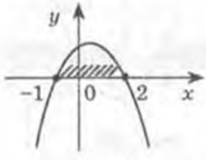


Рис. 37

Знайдемо нулі цієї функції:

$-x^2 + x + 2 = 0$; $x^2 - x - 2 = 0$.

$x_1 = 2$, $x_2 = -1$.

Отже $-x^2 + x + 2 \geq 0$,

якщо $x \in [-1; 2]$ (рис. 37).

Відповідь. $x \in [-1; 2]$.

Приклад 2. Розв'язати нерівність $0,4^{x^3-x^2-20x} < 1$.

Розв'язання.

$0,4^{x^3-x^2-20x} < 0,4^0$.

Оскільки функція $y = 0,4^t$ спадає, то $x^3 - x^2 - 20x > 0$.

Розв'яжемо цю нерівність методом інтервалів.

Розглянемо функцію $y = x^3 - x^2 - 20x$, $D(y) = (-\infty; +\infty)$.

Знайдемо нулі цієї функції:

$x^3 - x^2 - 20x = 0$; $x(x^2 - x - 20) = 0$;

$\left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x^2 - x - 20 = 0; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = -4, \\ x = 5. \end{array}\right.$

Нанесемо нулі функції на числову пряму (рис. 38).

Визначимо знак функції на кожному з утворених проміжків:

$y(-5) = -5((-5)^2 - (-5) - 20) < 0$;

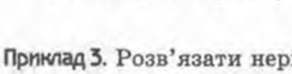


Рис. 38

$y(-1) = -1((-1)^2 - (-1) - 20) > 0$;

$y(1) = 1(1^2 - 1 - 20) < 0$;

$y(6) = 6 \cdot (6^2 - 6 + 20) > 0$.

Отже, $x \in (-4; 0) \cup (5; +\infty)$ (рис. 38).

Відповідь. $x \in (-4; 0) \cup (5; +\infty)$.

Приклад 3. Розв'язати нерівність

$7 \cdot 2^{2x} + 2^{2x+1} \leq 3^{2x+1} + 3^{2x}$.

Розв'язання.

$2^{2x}(7 + 2) \leq 3^{2x}(3 + 1)$;

$9 \cdot 2^{2x} \leq 4 \cdot 3^{2x}$;

Поділивши ліву і праву частини нерівності на 3^{2x}, матимемо:

$9 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} \le 4$; $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} \le \frac{4}{9}$; $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} \le \left(\frac{2}{3}\right)^{2}$.

Оскільки функція $y = \left(\frac{2}{3}\right)^{t}$ спадає, то $2x \ge 2$; $x \ge 1$.

Відповідь. $x \in [1; +\infty)$.

Приклад 4. Розв'язати нерівність $3^{2x+1} + 2 \cdot 3^{x} - 1 \ge 0$.

Розв'язання.

$3^{2x} \cdot 3 + 2 \cdot 3^{x} - 1 \ge 0$.

Нехай $3^{2x} = t > 0$, тоді

$$\begin{cases} 3t^2 + 2t - 1 \ge 0, \\ t > 0. \end{cases}$$

Розв'яжемо першу нерівність системи.

Графіком функції $y = 3t^2 + 2t - 1$ є парабола, вітки якої напрямлені вгору.

Знайдемо нулі функції: $3t^2 + 2t - 1 = 0$; $D = 4 + 12 = 16$;

$t_1 = \frac{-2+4}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$; $t_2 = \frac{-2-4}{6} = -1$.

Отже, $3t^2 + 2t - 1 \ge 0$,

якщо $t \in (-\infty; -1] \cup \left[\frac{1}{3}; +\infty\right)$ (рис. 39), тоді розв'язком системи

$\begin{cases} 3t^2 + 2t - 1 \ge 0, \\ t > 0; \end{cases}$ є (рис. 39):

$t \in \left[\frac{1}{3}; +\infty\right)$, тобто $t \ge \frac{1}{3}$.

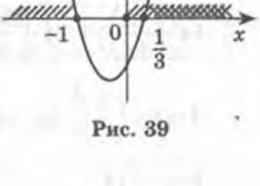


Рис. 39

Тоді $3^{x} \ge \frac{1}{3}$; $3^{x} \ge 3^{-1}$; $x \ge -1$.

Відповідь. $x \in [-1; +\infty)$.

Приклад 5. Розв'язати нерівність $2^{2x+1} + 4 \le 9 \cdot 2^{x}$.

Розв'язання.

$2^{2x} \cdot 2 - 9 \cdot 2^{x} + 4 \le 0$.

Нехай $2^{x} = t > 0$, тоді $\begin{cases} 2t^2 - 9t + 4 \le 0, \\ t > 0. \end{cases}$

Розв'яжемо першу нерівність системи.

Графіком функції $y = 2t^2 - 9t + 4$ є парабола, вітки якої напрямлені вгору.

Знайдемо нулі функції

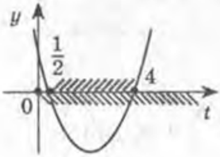


Рис. 40

$2t^2 - 9t + 4 = 0;$

$D = 81 - 32 = 49;$

$t_1 = \frac{9+7}{4} = \frac{16}{4} = 4;\ t_2 = \frac{9-7}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$

Отже, $2t^2 - 9t + 4 \le 0$,

якщо $t \in \left[\frac{1}{2}; 4\right]$ (рис. 40), тоді

$\begin{cases} 2t^2 - 9t + 4 \le 0, \\ t > 0, \end{cases}$ якщо (рис. 40) $t \in \left[\frac{1}{2}; 4\right]$, тобто $\frac{1}{2} \le t \le 4$.

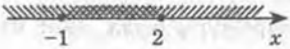


Рис. 41

Тоді

$\begin{cases} 2^x \le 4, \\ 2^x \ge \frac{1}{2}; \end{cases}$ $\begin{cases} 2^x \le 2^2, \\ 2^x \ge 2^{-1}; \end{cases}$ $\begin{cases} x \le 2, \\ x \ge -1. \end{cases}$

Розв'язком утвореної системи є числа з проміжку [–1; 2] (рис. 41).

Відповідь. $x \in [-1; 2]$.

Приклад 6. Розв'язати нерівність $7 \cdot 4^{x+0,5} + 2 \cdot 7^{2x+1} < 53 \cdot 14^x$.

Розв'язання.

$7 \cdot 4^x \cdot 2 + 2 \cdot 7 \cdot 49^x < 53 \cdot 14^x.$

Поділивши члени нерівності на 14^x, одержимо:

$14 \cdot \left(\frac{4}{14}\right)^x + 14 \cdot \left(\frac{49}{14}\right)^x < 53;\ 14 \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^x + 14 \cdot \left(\frac{7}{2}\right)^x < 53.$

Нехай $\left(\frac{2}{7}\right)^x = t > 0$, тоді $\left(\frac{7}{2}\right)^x = \frac{1}{t}$ і $14t + \frac{14}{t} < 53;$

$\frac{14t^2 + 14}{t} < 53;\ 14t^2 + 14 < 53t;\ 14t^2 - 53t + 14 < 0;$

Розв'яжемо цю нерівність, для чого знайдемо корені тричлена:

$14t^2 - 53t + 14 = 0;$

$D = 2809 - 784 = 2025;$

$t_1 = \frac{53+45}{28} = \frac{98}{28} = \frac{7}{2};\quad t_2 = \frac{53-45}{28} = \frac{8}{28} = \frac{2}{7}.$

Отже, $14t^2 - 53t + 14 < 0$, якщо $t \in \left(\frac{2}{7}; \frac{7}{2}\right)$,

тобто $\frac{2}{7} < t < \frac{7}{2}$ (рис. 42).

Тоді

$$\left[\begin{cases}\left(\frac{2}{7}\right)^x < \frac{7}{2}, \\ \left(\frac{2}{7}\right)^x > \frac{2}{7};\end{cases}\right. \quad \left[\begin{cases}\left(\frac{2}{7}\right)^x < \left(\frac{2}{7}\right)^{-1}, \\ \left(\frac{2}{7}\right)^x > \frac{2}{7};\end{cases}\right.$$

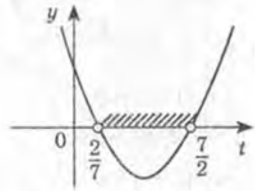


Рис. 42

Оскільки функція $y = \left(\frac{2}{7}\right)^u$ спадає, то

$$\begin{cases} x > -1, \\ x < 1. \end{cases}$$

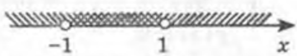


Рис. 43

Розв'язком цієї системи є числа з проміжку $(-1; 1)$ (рис. 43).

Відповідь. $x \in (-1; 1)$.

Приклад 7. Розв'язати нерівність $(x-1)^{x+1} \le 1$.

Розв'язання.

$(x-1)^{x+1} \le (x-1)^0$;

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x - 1 > 1, \\ x + 1 \le 0; \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < x - 1 < 1, \\ x + 1 \ge 0. \end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x > 2, \\ x \le -1; \end{cases} \\ \begin{cases} 1 < x < 2, \\ x \ge -1. \end{cases}\end{array}\right.$$

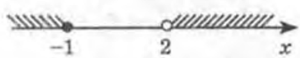


Рис. 44

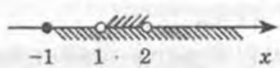


Рис. 45

Система $\begin{cases} x > 2, \\ x \le -1 \end{cases}$ не має розв'язків (рис. 44), а розв'язками системи $\begin{cases} 1 < x < 2, \\ x \ge -1; \end{cases}$ є числа з проміжку $(1; 2)$ (рис. 45).

Отже, $x \in (1; 2)$.

Відповідь. $x \in (1; 2)$.

3. Логарифмічні нерівності

Це треба знати!

Розв'язування логарифмічних нерівностей ґрунтується на тому, що функція $y = \log_a x$, при $a > 1$ зростає, а при $0 < a < 1$ — спадає.

Логарифмічна нерівність $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ рівносильна сукупності систем

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}f(x)>0,\\ g(x)>0,\\ f(x)>g(x),\\ a>1;\end{cases}\\ \begin{cases}f(x)>0,\\ g(x)>0,\\ f(x)<g(x),\\ 0<a<1.\end{cases}\end{array}\right.$$

Логарифмічна нерівність $\log_a f(x) < \log_a g(x)$ рівносильна сукупності систем

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}f(x)>0,\\ g(x)>0,\\ f(x)<g(x),\\ a>1;\end{cases}\\ \begin{cases}f(x)>0,\\ g(x)>0,\\ f(x)>g(x),\\ 0<a<1.\end{cases}\end{array}\right.$$

Самовчитель

Приклад 1. Розв'язати нерівність $\log_{0,5}(x^2+3x) \ge -2$.

Розв'язання.

Оскільки $-2 = -2\cdot 1 = -2\cdot\log_{0,5} 0,5 = \log_{0,5}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-2} = \log_{0,5} 4$, то

$\log_{0,5}(x^2+3x) \ge \log_{0,5} 4$.

Оскільки функція $y = \log_{0,5} t$ спадає, то

$$\begin{cases}x^2+3x \le 4,\\ x^2+3x>0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}x^2+3x-4 \le 0,\\ x^2+3x>0.\end{cases}$$

Розв'яжемо нерівності системи.

Графіками функцій $y = x^2+3x-4$ і $y = x^2+3x$ є параболи, вітки яких напрямлені вгору.

Знайдемо нулі першої функції.

$x^2+3x-4=0$; $\left[\begin{array}{l}x=-4,\\ x=1.\end{array}\right.$

Отже, $x^2+3x-4 \le 0$,

якщо $x \in [-4; 1]$ (рис. 46).

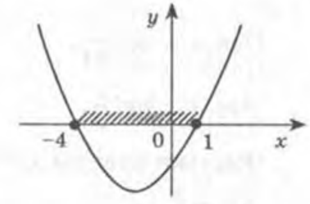


Рис. 46

Знайдемо нулі функції $y = x^2+3x$:

$x^2+3x=0$; $x(x+3)=0$;

$\left[\begin{array}{l}x=0,\\ x=-3.\end{array}\right.$

Отже, $x^2+3x>0$,

якщо $x \in (-\infty; -3) \cup (0; +\infty)$ (рис. 47).

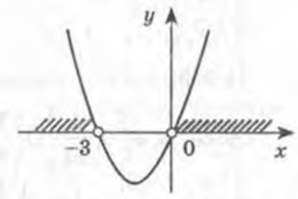


Рис. 47

Спільними розв'язками системи

$$\begin{cases}x \in [-4; 1],\\ x \in (-\infty; -3) \cup (0; +\infty);\end{cases}$$

є числа $x \in [-4; -3) \cup (0; 1]$ (рис. 48).

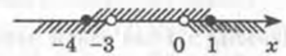


Рис. 48

Відповідь. $x \in [-4; -3) \cup (0; 1]$.

Приклад 2. Розв'язати нерівність

$\log_3^2 x + 5\log_3 x + 4 \ge 0$.

Розв'язання.

ОДЗ: $x \in (0; +\infty)$.

Нехай $\log_3 x = t$, тоді $t^2+5t+4 \ge 0$. Розв'яжемо цю нерівність.

Графіком функції $y = t^2+5t+4$ є парабола, вітки якої напрямлені вгору. Знайдемо нулі даної функції: $t^2+5t+4=0$; $t_1=-1$; $t_2=-4$.

Отже, $t^2+5t+4 \ge 0$, якщо.

$t \in (-\infty; -4] \cup [-1; +\infty)$ (рис. 49), тобто

$\left[\begin{array}{l}t \le -4,\\ t \ge -1;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}\log_3 x \le -4,\\ \log_3 x \ge -1.\end{array}\right.$

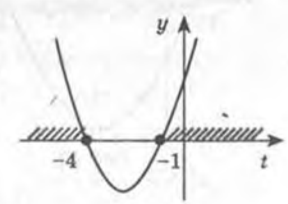


Рис. 49

Оскільки

$-4 = -4\cdot 1 = -4\cdot\log_3 3 = \log_3 3^{-4} = \log_3\dfrac{1}{81}$;

$-1 = -1\cdot 1 = -1\cdot\log_3 3 = \log_3 3^{-1} = \log_3\dfrac{1}{3}$, то маємо:

$$\left[\begin{array}{l}\log_3 x \le \log_3 \dfrac{1}{81},\\[2mm] \log_3 x \ge \log_3 \dfrac{1}{3}.\end{array}\right.$$

Оскільки функція $y = \log_3 u$ зростає, то

$$\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x \le \dfrac{1}{81},\\[2mm] x \ge \dfrac{1}{3},\end{array}\right.\\ x > 0.\end{array}\right.$$

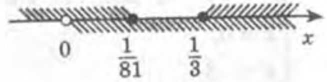


Рис. 50

Отже, $x \in \left(0; \dfrac{1}{81}\right] \cup \left[\dfrac{1}{3}; +\infty\right)$ (рис. 50).

Відповідь. $x \in \left(0; \dfrac{1}{81}\right] \cup \left[\dfrac{1}{3}; +\infty\right)$.

Приклад 3. Розв'язати нерівність $\log_{(1+x)}\left(x^2 - 6x - 7\right) < 1$.

Розв'язання.

ОДЗ: $\left\{\begin{array}{l}x^2 - 6x - 7 > 0,\\ 1 + x > 0,\\ 1 + x \ne 1;\end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l}x^2 - 6x - 7 > 0,\\ x > -1,\\ x \ne 0.\end{array}\right.$

Розв'яжемо нерівність $x^2 - 6x - 7 > 0$.

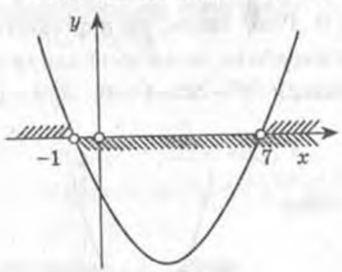


Рис. 51

Графіком функції $y = x^2 - 6x - 7$ є парабола, вітки якої напрямлені вгору.

Знайдемо нулі цієї функції:

$x^2 - 6x - 7 = 0$;

$\left[\begin{array}{l}x_1 = 7,\\ x_2 = -1.\end{array}\right.$

Отже, $x^2 - 6x - 7 > 0$, якщо $x \in (-\infty; -1) \cup (7; +\infty)$ (рис. 51), тоді

розв'язком системи $\left\{\begin{array}{l}x^2 - 6x - 7 > 0,\\ x > -1,\\ x \ne 0,\end{array}\right.$ є $x \in (7; +\infty)$.

Отже, ОДЗ: $x \in (7; +\infty)$.

$\log_{(1+x)}\left(x^2 - 6x - 7\right) < \log_{(1+x)}(1 + x)$.

$$\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}1 + x > 1,\\ x > 7,\\ x^2 - 6x - 7 < 1 + x;\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}0 < 1 + x < 1,\\ x^2 - 6x - 7 > 1 + x,\\ x > 7.\end{array}\right.\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x > 0,\\ x > 7,\\ x^2 - 7x - 8 < 0;\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}0 < 1 + x < 1,\\ x > 7,\\ x^2 - 7x - 8 > 0;\end{array}\right.\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x > 7,\\ x^2 - 7x - 8 < 0;\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}-1 < x < 0,\\ x > 7,\\ x^2 - 7x - 8 > 0.\end{array}\right.\end{array}\right.$$

Друга система сукупності розв'язків не має, оскільки неможливо, щоб одночасно виконувалися умови $x > 7$ і $-1 < x < 0$. Розв'яжемо першу систему сукупності. Графіком функції $y = x^2 - 7x - 8$ є парабола, вітки якої напрямлені вгору.

Знайдемо нулі функції: $x^2 - 7x - 8 = 0$; $x_1 = 8$; $x_2 = -1$.

Отже, $x^2 - 7x - 8 < 0$, якщо $x \in (-1; 8)$ (рис. 52).

Враховуючи, що $x > 7$ (рис. 52), маємо $x \in (7; 8)$.

Відповідь. $x \in (7; 8)$.

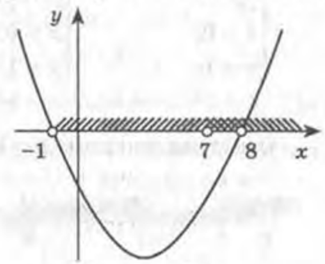


Рис. 52

Приклад 4. Розв'язати нерівність $\log_x 3 + \log_3 x \le \dfrac{5}{2}$.

Розв'язання.

ОДЗ: $x \in (0; 1) \cup (1; +\infty)$.

$\dfrac{1}{\log_3 x} + \log_3 x \le \dfrac{5}{2}$.

Нехай $\log_3 x = t$, тоді $\dfrac{1}{t} + t \le \dfrac{5}{2}$; $\dfrac{t^2 + 1}{t} \le \dfrac{5}{2}$; $\dfrac{t^2 + 1}{t} - \dfrac{5}{2} \le 0$;

$\dfrac{2\left(t^2 + 1\right) - 5t}{2t} \le 0$; $\dfrac{2t^2 - 5t + 2}{2t} \le 0$.

Розв'яжемо утворену нерівність методом інтервалів, для чого знайдемо нулі функції $y = \dfrac{2t^2 - 5t + 2}{2t}$:

$\dfrac{2t^2 - 5t + 2}{2t} = 0;$ $\begin{cases} 2t^2 - 5t + 2 = 0, \\ t \neq 0; \end{cases}$

$D = 25 - 16 = 9.$

$t_1 = \dfrac{5+3}{4} = 2;$ $t_2 = \dfrac{5-3}{4} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}.$

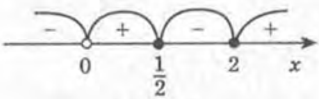


Рис. 53

Нанесемо на числову пряму нулі функції та область її визначення й визначимо знаки функції на утворених проміжках (рис. 53).

Отже, $\dfrac{2t^2 - 5t + 2}{2t} \le 0$, якщо $t \in (-\infty; 0) \cup \left[\dfrac{1}{2}; 2\right]$, тобто

$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \log_3 x < 0, \\ \dfrac{1}{2} \le \log_3 x \le 2; \end{array}\right. \\ x > 0, \\ x \neq 1; \end{cases}$ $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \log_3 x < \log_3 1, \\ \log_3 \sqrt{3} \le \log_3 x \le \log_3 9; \end{array}\right. \\ x > 0, \\ x \neq 1. \end{cases}$

Оскільки функція $y = \log_3 u$ зростає, то $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x < 1, \\ \sqrt{3} \le x \le 9; \end{array}\right. \\ x > 0, \\ x \neq 1. \end{cases}$

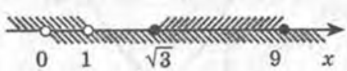


Рис. 54

Тоді маємо $x \in (0; 1) \cup \left[\sqrt{3}; 9\right]$ (рис. 54).

Відповідь. $x \in (0; 1) \cup \left[\sqrt{3}; 9\right]$.

4. Нерівності з параметрами

Самовчитель

Приклад 1. Розв'язати нерівність $(a - 5)x < 12$.

Розв'язання.

Розглянемо три випадки:

1) $a - 5 = 0;$

2) $a - 5 < 0;$

3) $a - 5 > 0.$

1) Якщо $a-5=0$, тобто $a=5$, то матимемо нерівність $0\cdot x<12$, розв'язком якої є будь-яке число.

2) Якщо $a-5<0$, тобто $a<5$, то, поділивши обидві частини нерівності на число $a-5$, одержимо $x>\frac{12}{a-5}$.

3) Якщо $a-5>0$, тобто $a>5$, то, поділивши обидві частини нерівності на додатне число $a-5$, одержимо:

$x<\frac{12}{a-5}$.

Відповідь. Якщо $a=5$, то розв'язком нерівності є будь-яке число; якщо $a<5$, то $x>\frac{12}{a-5}$; якщо $a>5$, то $x<\frac{12}{a-5}$.

Приклад 2. Розв'язати нерівність $(a-2)x^2-x-1\ge 0$.

Розв'язання.

Якщо $a-2=0$, то $a=2$. При цьому нерівність набуває вигляду:

$-x-1\ge 0;\ \ -x\ge 1;$

$x\le -1.$

При $a\ne 2$ знайдемо дискримінант тричлена:

$D=(-1)^2-4\cdot(a-2)\cdot(-1)=1+4(a-2)=4a-7.$

Якщо $D=4a-7<0$, тобто $a<\frac{7}{4}$, то коефіцієнт $a-2<0$. Графіком функції $y=(a-2)x^2-x-1$ є парабола, вітки якої напрямлені вниз (рис. 55). Оскільки $D<0$, то нулів функція не має.

Отже, якщо $a<\frac{7}{4}$, то нерівність розв'язків не має.

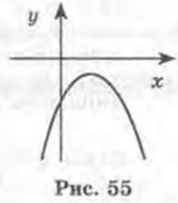


Рис. 55

Якщо $a=\frac{7}{4}$, то $D=0$.

Нерівність при цьому матиме вигляд:

$-\frac{1}{4}x^2-x-1\ge 0.$

Розв'яжемо цю нерівність.

Знайдемо нулі функції $y=-\frac{1}{4}x^2-x-1$:

$-\frac{1}{4}x^2-x-1=0;$

$x^2+4x+4=0;\ \ (x+2)^2=0;\ \ x=-2.$

Отже, $-\frac{1}{4}x^2 - x - 1 \ge 0$, якщо $x = -2$ (рис. 56).

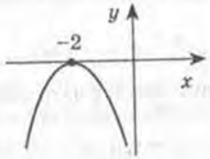


Рис. 56

Отже, якщо $a = \frac{7}{4}$, то $x = -2$.

Якщо $D = 4a - 7 > 0$, тобто $a > \frac{7}{4}$ і $a \ne 2$, тоді коренями тричлена $(a-2)x^2 - x - 1$ є числа

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{4a-7}}{2(a-2)}.$$

При цьому можливі два випадки.

1) Якщо вітки параболи напрямлені вгору (рис. 57), то $x \in (-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty)$, де x_1, x_2 — корені тричлена.

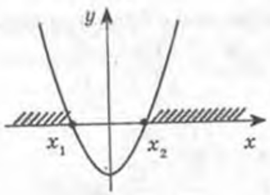


Рис. 57

2) Якщо вітки параболи напрямлені вниз (рис. 58), то

$x \in [x_1; x_2]$, де x_1 і x_2 — корені тричлена.

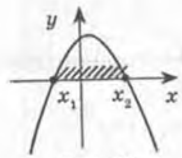


Рис. 58

Випадок 1) можливий при виконанні умови

$$\begin{cases} a > 2, \\ a < \frac{7}{4}, \end{cases}$$ тобто при $a > 2$.

Випадок 2) можливий при виконанні умови

$$\begin{cases} a < 2, \\ a > \frac{7}{4}, \end{cases}$$ звідси (рис. 59)

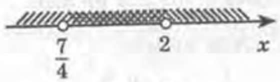


Рис. 59

$a \in \left(\frac{7}{4}; 2\right)$, тобто $\frac{7}{4} < a < 2$.

Відповідь. Якщо $a = 2$, то $x \in (-\infty; -1]$;

якщо $a = \frac{7}{4}$, то $x = -2$;

якщо $a < \frac{7}{4}$, то нерівність розв'язків не має;

якщо $a > 2$, то $x \in \left(-\infty; \frac{1-\sqrt{4a-7}}{2(a-2)}\right] \cup \left[\frac{1+\sqrt{4a-7}}{2(a-2)}; +\infty\right)$;

якщо $\frac{7}{4} < a < 2$, то $x \in \left[\frac{1+\sqrt{4a-7}}{2(a-2)}; \frac{1-\sqrt{4a-7}}{2(a-2)}\right]$.

Приклад 3. Знайти всі значення параметра a, при яких нерівність $(a+1)x^2 - 2(a-1)x + 3a - 3 \ge 0$ виконується при всіх значеннях x.

Розв'язання.

Графіком функції $y = (a+1)x^2 - 2(a-1)x + 3a - 3$ є парабола, якщо тільки $a \ne -1$. Дана нерівність буде виконуватися при всіх значеннях x, якщо: 1) вітки параболи будуть напрямлені вгору; 2) функція $y = (a+1)x^2 - 2(a-1)x + 3a - 3$ не матиме нулів або матиме один нуль. Це можливо за виконання умов:

$$\begin{cases} a+1 > 0, \\ D \le 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+1 > 0, \\ 4(a-1)^2 - 4(a+1)(3a-3) \le 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a > -1, \\ 4(a^2 - 2a + 1 - 3a^2 + 3) \le 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a > -1, \\ -2a^2 - 2a + 4 \le 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a > -1, \\ a^2 + a - 2 \ge 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a > -1, \\ \left[\begin{array}{l} a \le -2, \\ a \ge 1, \end{array}\right. \end{cases}$$ звідси $a \in [1; +\infty)$ (рис. 60).

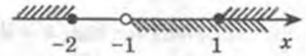


Рис. 60

Відповідь. $a \in [1; +\infty)$.

Вправи для самостійного розв'язування

Перевір себе

Розв'язати нерівності:

1) $\sqrt{x^2+9} > 4 - x$; 2) $(x-12)\sqrt{x-3} < 0$;

3) $\sqrt{3x - x^2} < 4 - x$; 4) $\sqrt{(x-5)(x+2)} < 8 - x$;

5) $(0,4)^{\frac{3x-1}{x+1}} \ge (2,5)^{x+1}$; 6) $(0,5)^{x-3} \le 4^{1-\frac{1}{x}}$;

7) $2^{1+\frac{8}{x}} \ge 0,5 \cdot 2^x$; 8) $(0,5)^{\frac{x^2-10}{x}} \ge 8$;

9) $2^{\frac{x-1}{3}} > \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$; 10) $7^{-x} - 3 \cdot 7^{x+1} > 4$;

11) $9^x - 3^x \le 6$; 12) $4^x - 2^x \ge 2$;

13) $2^x + 2^{1-x} \le 3$; 14) $5^{2x+1} + 4 \cdot 5^x - 1 \ge 0$;

15) $4 \cdot (0,5)^{2x} - 33 \cdot (0,5)^x + 8 \le 0$;

16) $8 \cdot (0,5)^{2x} - 17 \cdot (0,5)^x + 2 \le 0$;

17) $3^{2x+1} + 3 > 10 \cdot 3^x$;

18) $2^{2x+1} + 25^{x+0,5} \le 7 \cdot 10^x$;

19) $(x^2 - x + 1)^{3-x} < 1$;

20) $(2 - x)^{x^2-2x+8} \ge 1$;

21) $\log_{0,3} \dfrac{1+2x}{1+x} > 1$;

22) $\log_4 (x^2 - 6x + 8) > 0,5$;

23) $\log_{0,2} (x^2 + 4x) \ge -1$;

24) $\log_3 (x^2 - x - 1) < 0$;

25) $\log_5^2 x - \log_5 x > 2$;

26) $(3x - 6) \cdot \log_{0,5} x > 0$;

27) $\log_{0,2}^2 x - \log_{0,2} x \ge 0$;

28) $\lg^2 (3x + 2) < \lg\left(x + \dfrac{2}{3}\right) + \lg 3$;

29) $\log_x 0,2 + \log_{0,2} x \ge \dfrac{10}{3}$;

30) $\log_x \dfrac{2x+3}{x^2+1} > 0$;

31) $\log_x (5x - 4) \ge 2$;

32) $(5 - a)x < 10$;

33) $(a + 7)x > 17$;

34) $x^2 - 17ax + 16a^2 > 0$.

РОЗДІЛ 4. ФУНКЦІЇ ТА ЇХ ГРАФІКИ

§ 1. Види функцій та їх властивості

Це треба знати!

1. Залежність змінної y від змінної x називається функцією, якщо кожному значенню x, відповідає одне і тільки одне значення y. Змінну x називають ***незалежною змінною***, або ***аргументом***, а змінну y — ***залежною змінною***. Значення y, яке відповідає даному значенню x, називають ***значенням функції*** f у точці x і позначають $f(x)$.

Область визначення функції f — це множина тих значень, яких може набувати аргумент x. Вона позначається $D(f)$ або $D(y)$.

Область значень функції f — це множина, яка складається із всіх чисел $f(x)$, де x пробігає область визначення. Її позначають $E(f)$ або $E(y)$.

Графіком функції $y = f(x)$ називається множина всіх точок координатної площини з координатами (x, y), де перша координата x належить області визначення функції, а друга координата y — це відповідне значення функції f у точці x.

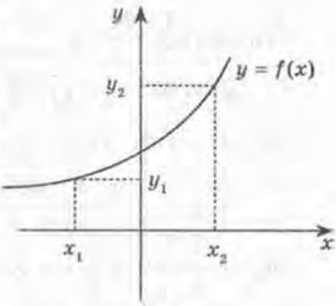


Рис. 61

Функція $y = f(x)$ називається ***зростаючою*** на множині X (рис. 61), якщо для будь-яких x_1 і x_2 із X, таких, що $x_1 < x_2$, виконується нерівність $f(x_1) < f(x_2)$, тобто якщо меншому значенню аргументу з цієї множини відповідає менше значення функції.

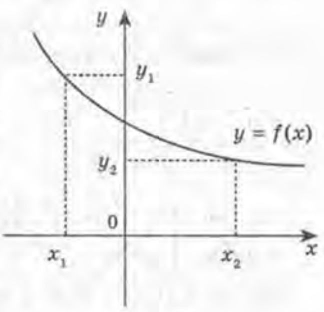


Рис. 62

Функція $y = f(x)$ називається ***спадною*** на множині X (рис. 62), якщо для будь-яких x_1 і x_2 із X, таких, що $x_1 < x_2$, виконується нерівність $f(x_1) > f(x_2)$, тобто, якщо меншому значенню аргументу з цієї множини відповідає більше значення функції.

Для функцій, області визначення яких симетричні відносно початку координат, визначені поняття парності й непарності.

Функція $y = f(x)$ називається ***парною***, якщо область її визначення симетрична відносно початку координат і виконується рівність $f(-x) = f(x)$ (рис. 63).

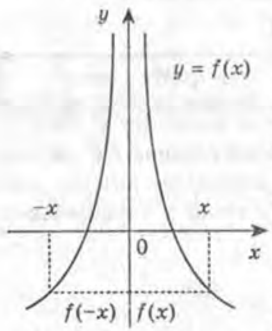


Рис. 63

Графік парної функції симетричний відносно осі ординат.

Функція $y = f(x)$ називається ***непарною***, якщо область її визначення симетрична відносно початку координат і виконується рівність $f(-x) = -f(x)$ (рис. 64).

Графік непарної функції симетричний відносно початку координат.

Функція $y = f(x)$ називається ***періодичною*** з періодом $T \neq 0$, якщо для будь-якого x з області визначення функції $y = f(x)$ виконується рівність $f(x+T) = f(x-T) = f(x)$ (рис. 65).

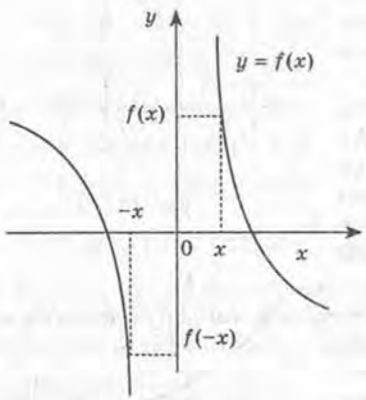


Рис. 64

Функція $y = \sin x$ та $y = \cos x$ — періодичні з найменшим додатним періодом $T = 2\pi$.

Функції $y = \operatorname{tg} x$ та $y = \operatorname{ctg} x$ — періодичні з найменшим додатним періодом $T = \pi$.

Якщо число T — найменший додатний період функції $y = f(x)$, то число $n \cdot T$, де $(n \in Z)$ — також період цієї функції.

Якщо функція $y = f(x)$ періодична з періодом T, то функція $y = Af(kx+b)$ також періодична з періодом $\frac{T}{|k|}$, де A, b, k — сталі числа, $k \neq 0$.

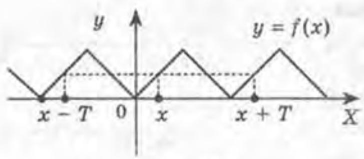


Рис. 65

Наприклад,

якщо $y = 4\cos\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{4}\right)$,

то $T = \frac{2\pi}{\frac{1}{3}} = 6\pi$.

Якщо $y = 5\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right)$, то $T = \frac{\pi}{|-2|} = \frac{\pi}{2}$.

2. ***Постійною*** називається функція, яка задається формулою $y = b$, де b — деяке число. Графіком функції $y = b$ є пряма, що проходить через точку $(0; b)$ і паралельна осі абсцис (рис. 66).

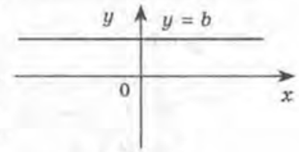


Рис. 66

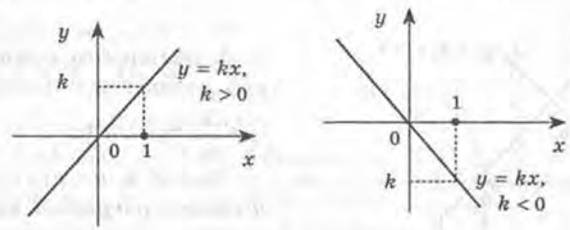
3. ***Прямою пропорційністю*** називається функція виду $y = kx$, де $k \neq 0$. Число k називається ***коефіцієнтом пропорційності***.

При $k > 0$ функція зростає, а при $k < 0$ спадає на всій числовій прямій.

Графіком прямої пропорційності $y = kx$ є пряма, яка проходить через початок координат (рис. 67).

а) $y = kx$, $k > 0$;

б) $y = kx$, $k < 0$.



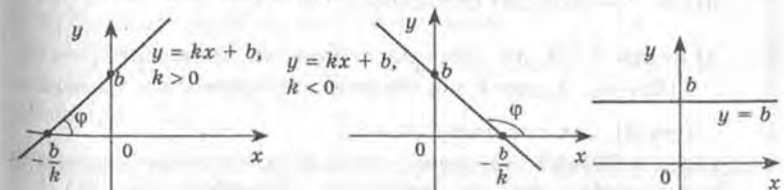
а) б)

Рис. 67

4. ***Лінійною*** називається функція виду $y = kx + b$, де k і b — деякі числа. Число k називається ***кутовим коефіцієнтом прямої*** і дорівнює $\operatorname{tg}\alpha$, α — кут між прямою і додатним напрямом осі абсцис, тобто $k = \operatorname{tg}\alpha$.

При $k > 0$ функція зростає, а при $k < 0$ спадає на всій числовій прямій, при $k = 0$ функція постійна.

Графіком лінійної функції є пряма (рис. 68).



а) б) в)

Рис. 68

а) $y = kx + b$, $k > 0$;

б) $y = kx + b$, $k < 0$;

в) $y = b$, $k = 0$.

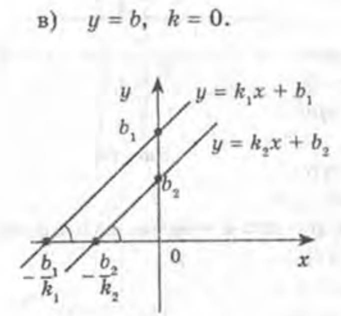


Рис. 69

Дві прямі $y = k_1x + b_1$ і $y = k_2x + b_2$ паралельні, якщо $k_1 = k_2$, $b_1 \neq b_2$ (рис. 69).

Дві прямі $y = k_1x + b_1$ і $y = k_2x + b_2$ перпендикулярні, якщо $k_1 = -\frac{1}{k_2}$ (рис. 70).

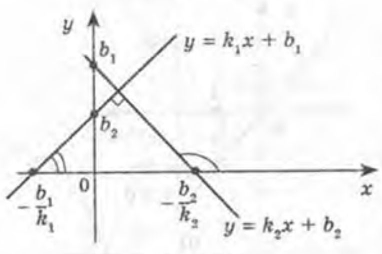


Рис. 70

5. ***Оберненою пропорційністю*** називається функція виду $y = \frac{k}{x}$, де $k \neq 0$.

Число k називають ***коефіцієнтом оберненої пропорційності.***

Властивості функції $y = \frac{k}{x}$:

1) $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$;

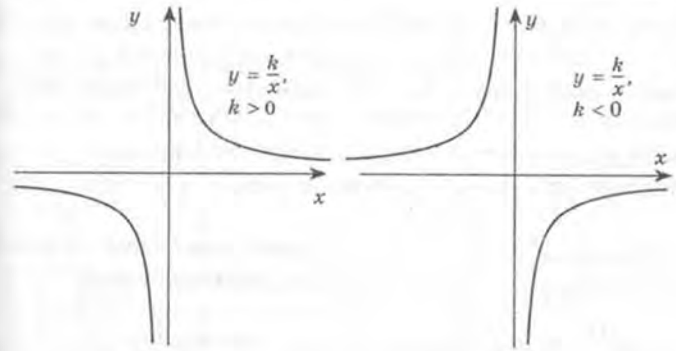
2) $E(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$;

3) $y = \frac{k}{x}$ — непарна функція;

4) якщо $k > 0$, то функція спадає на проміжку $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$. Якщо $k < 0$, то функція зростає на проміжку $(-\infty; 0)$ і на проміжку $(0; +\infty)$.

Графіком оберненої пропорційності є гіпербола (рис. 71).

а) $y = \frac{k}{x}$, $k > 0$; б) $y = \frac{k}{x}$, $k < 0$.



а) б)

Рис. 71

6. Функція $y = x^2$.

1) $D(y) = (-\infty; +\infty)$;

2) $E(y) = [0; +\infty)$;

3) $y = x^2$ — парна функція;

4) на проміжку $(0; +\infty)$ функція зростає, на проміжку $(-\infty; 0)$ функція спадає.

Графіком функції $y = x^2$ є парабола, вітки якої напрямлені вгору. Вершина параболи $y = x^2$ — точка (0; 0) (рис. 72).

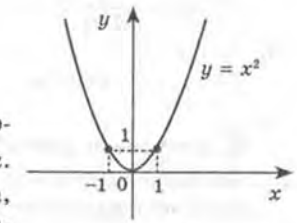


Рис. 72

7. Функція $y = x^3$.

1) $D(y) = (-\infty; +\infty)$;

2) $E(y) = (-\infty; +\infty)$;

3) $y = x^3$ — непарна функція;

4) функція зростає на всій числовій прямій.

Графіком функції $y = x^3$ є кубічна парабола (рис. 73).

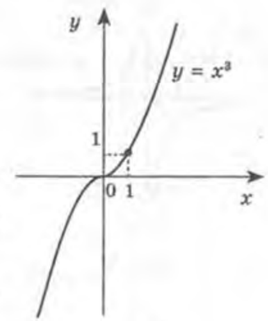


Рис. 73

8. Степенева функція з натуральним показником.

Функція виду $y = x^n$, де n — натуральне число, називається ***степеневою функцією з натуральним показником.***

Якщо $n = 4, 6, 8, \ldots$ (парні натуральні числа, більші 2), то функція $y = x^n$ має такі самі властивості, як і функція $y = x^2$.

Графік такої функції нагадує параболу $y = x^2$ (рис. 74).

Якщо $n = 5, 7, 9, \ldots$ (непарні натуральні числа, більші 3), то функція $y = x^n$ має такі самі властивості, як і функція $y = x^3$. Графік такої функції нагадує кубічну параболу $y = x^3$ (рис. 75).

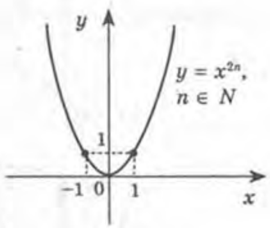


Рис. 74

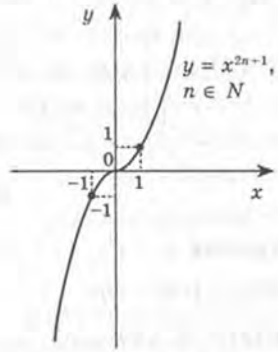


Рис. 75

9. Степенева функція з цілим від'ємним показником.

Функція виду $y = x^{-n}$, де n — натуральне число, називається ***степеневою функцією з цілим від'ємним показником.***

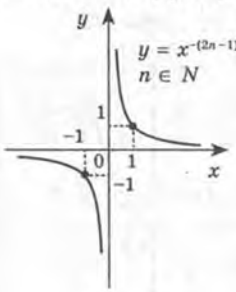


Рис. 76

Якщо $n = 3, 5, 7, \ldots$, то функція $y = x^{-n}$ має такі самі властивості, як і функція $y = \dfrac{1}{x}$. Графік такої функції нагадує графік функції $y = \dfrac{1}{x}$ (рис. 76).

$y = x^{-(2n-1)}$, $n \in N$.

Якщо $n = 2, 4, 6, 8, \ldots$, то функція $y = x^{-n}$ має такі самі властивості, як і функція $y = \dfrac{1}{x^2}$:

1) $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$;

2) $E(y) = (0; +\infty)$;

3) $y = \dfrac{1}{x^2}$ — парна функція;

4) функція спадає на $(0; +\infty)$ і зростає на $(-\infty; 0)$.

Графік функцій $y = x^{-n}$, де $n = 2, 4, 6, 8, \ldots$ подано на рис. 77.

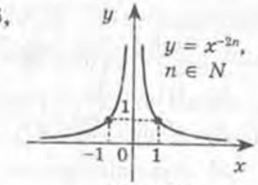


Рис. 77

10. Функція $y = \sqrt{x}$.

1) $D(y) = [0; +\infty)$;

2) $E(y) = [0; +\infty)$;

3) функція ні парна, ні непарна;

4) функція зростає на $(0; +\infty)$.

Графік функції $y = \sqrt{x}$ подано на рисунку 78.

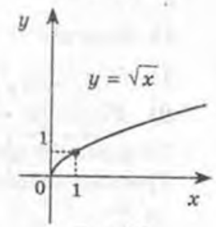


Рис. 78

11. Функція $y = \sqrt[3]{x}$.

1) $D(y) = (-\infty; +\infty)$;

2) $E(y) = (-\infty; +\infty)$;

3) $y = \sqrt[3]{x}$ — непарна;

4) функція зростає на всій числовій прямій.

Графік функції $y = \sqrt[3]{x}$ подано на рисунку 79.

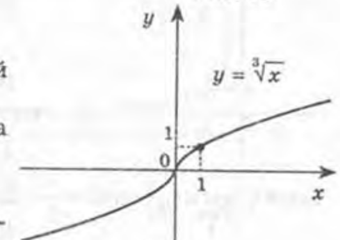


Рис. 79

12. Функція $y = \sqrt[n]{x}$, **n — натуральне число,** $n \geq 2$.

Якщо n — парне число, то функція $y = \sqrt[n]{x}$ має такі самі властивості, як і функція $y = \sqrt{x}$, графік її нагадує графік функції $y = \sqrt{x}$ (рис. 78).

1) $D(y) = [0; +\infty)$; 2) $E(y) = [0; +\infty)$;

3) функція зростає на області визначення.

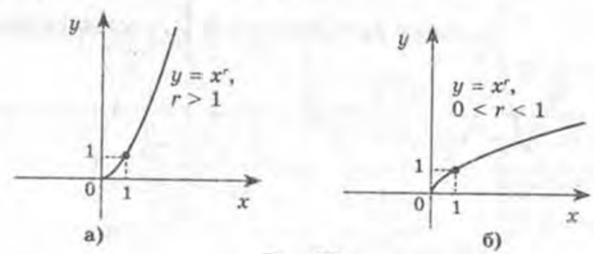


Рис. 80

Якщо n — непарне число, то функція $y = \sqrt[n]{x}$ має такі самі властивості, як і функція $y = \sqrt[3]{x}$, і графік її нагадує графік функції $y = \sqrt[3]{x}$ (рис. 79).

1) $D(y) = [0; +\infty)$;

2) $E(y) = [0; +\infty)$;

3) функція зростає на області визначення.

13. Функція $y = x^r$, де r — додатний нескоротний дріб.

1) $D(y) = [0; +\infty)$;

2) $E(y) = [0; +\infty)$;

3) функція зростає на області визначення.

Графіки функцій зображено на рис. 80:

а) $y = x^r$, $r > 1$;

б) $y = x^r$, $0 < r < 1$.

14. Функція $y = x^{-r}$, де r — додатний нескоротнтй дріб.

1) $D(y) = (0; +\infty)$;

2) $E(y) = (0; +\infty)$;

3) функція спадає на області визначення.

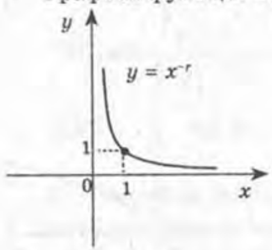


Рис. 81

Графік функції зображено на рис. 81.

15. Квадратична функція

Квадратичною називають функцію, яку можна задати формулою $y = ax^2 + bx + c$, де a, b, c — деякі дійсні числа, $a \neq 0$.

Графіком функції $y = ax^2 + bx + c$, де $a \neq 0$, є парабола (рис. 82).

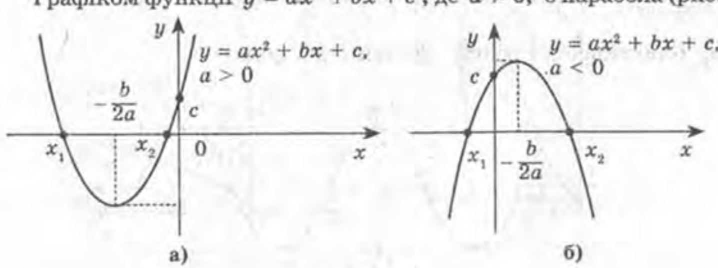


Рис. 82

а) $y = ax^2 + bx + c$, $a > 0$;

б) $y = ax^2 + bx + c$, $a < 0$.

Якщо $a > 0$, то вітки параболи напрямлені вгору, якщо $a < 0$, то вітки параболи напрямлені вниз.

Вершина параболи — точка з координатами $(m; n)$:

$m = -\dfrac{b}{2a}$; $n = y(m)$.

16. Властивості і графік функції $y = \sin x$.

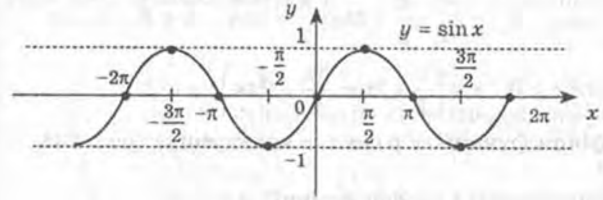


Рис. 83

1) $D(y) = (-\infty; +\infty)$;

2) $E(y) = [-1; 1]$;

3) $y = \sin x$ — непарна функція;

4) $T = 2\pi$;

5) функція зростає на проміжках $\left(-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n; \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$, $n \in Z$

і спадає на проміжках $\left(\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n; \dfrac{3\pi}{2} + 2\pi n\right)$, $n \in Z$;

6) $x = \pi n$, $n \in Z$ — нулі функції;

7) $\sin x > 0$, $x \in (2\pi n; \pi + 2\pi n)$, $n \in Z$;

8) $\sin x < 0$, $x \in (-\pi + 2\pi n; 2\pi n)$, $n \in Z$.

Графіком функції $y = \sin x$ є синусоїда (рис. 83).

17. Властивості і графік функції $y = \cos x$.

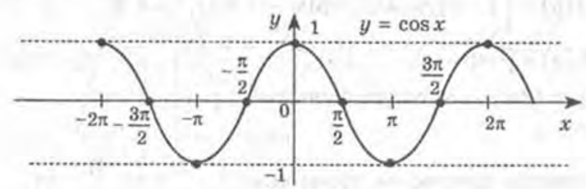


Рис. 84

1) $D(y) = (-\infty; +\infty)$;
2) $E(y) = [-1; 1]$;
3) $y = \cos x$ — парна функція;
4) $T = 2\pi$;
5) функція зростає на проміжках $(-\pi + 2\pi n; 2\pi n)$, $n \in Z$ і спадає на проміжках $(2\pi n; \pi + 2\pi n)$, $n \in Z$.
6) $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$ — нулі функції;
7) $\cos x > 0$, $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n; \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$, $n \in Z$;

$\cos x < 0$, $x \in \left(\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n; \dfrac{3\pi}{2} + 2\pi n\right)$, $n \in Z$.

Графіком функції $y = \cos x$ є косинусоїда (рис. 84).

18. Властивості і графік функції $y = \operatorname{tg} x$.

$\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, $x \ne \dfrac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$.

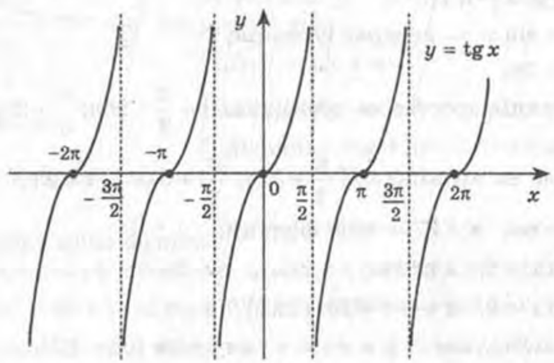


Рис. 85

1) $D(y) = \left\{x \text{ – будь-яке, крім } \dfrac{\pi}{2} + \pi n\right\}$, $n \in Z$;
2) $E(y) = (-\infty; +\infty)$;
3) $y = \operatorname{tg} x$ — непарна функція;
4) $T = \pi$;
5) функція зростає на проміжках $\left(-\dfrac{\pi}{2} + \pi n; \dfrac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in Z$;

6) $x = \pi n$, $n \in Z$ — нулі функції;
7) $\operatorname{tg} x > 0$, $x \in \left(\pi n; \dfrac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in Z$;

$\operatorname{tg} x < 0$, $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2} + \pi n; \pi n\right)$, $n \in Z$.

Графіком функції $y = \operatorname{tg} x$ є тангенсоїда (рис. 85).

19. Властивості і графік функції $y = \operatorname{ctg} x$.

$\operatorname{ctg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$, $x \ne \pi n$, $n \in Z$.

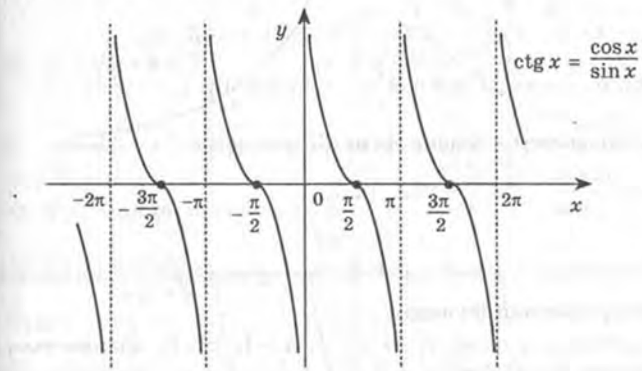


Рис. 86

1) $D(y) = \{x \text{ – будь-яке, крім } \pi n\}$, $n \in Z$;
2) $E(y) = (-\infty; +\infty)$;
3) $y = \operatorname{ctg} x$ — непарна функція;
4) $T = \pi$;
5) функція спадає на проміжках $(\pi n; \pi + \pi n)$, $n \in Z$;
6) $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$ — нулі функції;
7) $\operatorname{ctg} x > 0$, $x \in \left(\pi n; \dfrac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in Z$;

$\operatorname{ctg} x < 0$, $x \in \left(\dfrac{\pi}{2} + \pi n; \pi + \pi n\right)$, $n \in Z$.

Графіком функції $y = \operatorname{ctg} x$ є котангенсоїда (рис. 86).

20. Показникова функція.

Функція виду $y = a^x$, де $a > 0$, $a \neq 1$, називається ***показниковою*** функцією.

Основні властивості:

1) $D(y) = (-\infty; +\infty)$;
2) $E(y) = (0; +\infty)$;
3) $a^x > 0$;
4) якщо $a > 1$, то функція зростає на всій числовій прямій; якщо $0 < a < 1$, то функція спадає на всій числовій прямій (рис. 87).

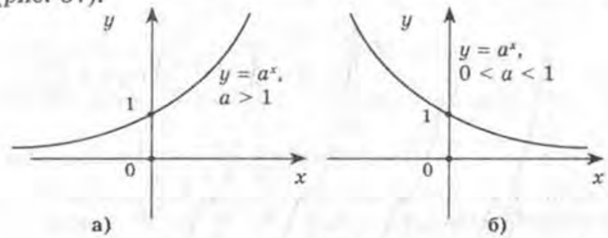


Рис. 87

21. Логарифмічна функція.

Функція виду $y = \log_a x$, де $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$, називається ***логарифмічною*** функцією.

Основні властивості:

1) $D(y) = (0; +\infty)$;
2) $E(y) = (-\infty; +\infty)$;
3) якщо $a > 1$, то функція зростає на проміжку $(0; +\infty)$; якщо $0 < a < 1$, то функція спадає на проміжку $(0; +\infty)$ (рис. 88).

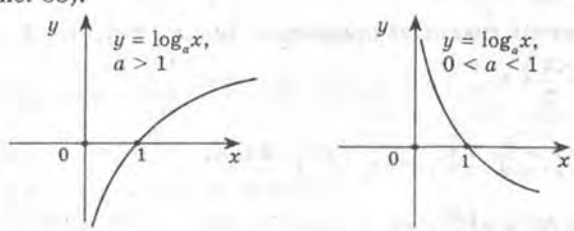


Рис. 88

22. Функція $y = |x|$.

$$y = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0; \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Графік функції $y = |x|$ подано на рисунку 89.

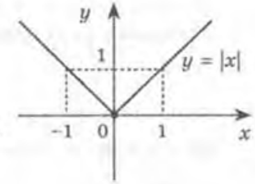


Рис. 89

Приклад 1. Знайти область визначення функції:

Самовчитель

а) $y = \dfrac{5x+7}{x^2-4}$; б) $y = \dfrac{2x-5}{x^2-x}$;

в) $y = \sqrt{4-2x}$; в) $y = \lg\dfrac{3x-x^2}{x-1}$;

д) $y = \sqrt{2-x} + \sqrt{2+x}$; е) $y = \dfrac{\sqrt{x}}{x^2-5x+6}$.

Розв'язання.

а) Функція визначена, якщо

$x^2 - 4 \neq 0$, тоді $\begin{cases} x \neq -2; \\ x \neq 2. \end{cases}$

Отже, $x \in (-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; +\infty)$.

Відповідь. $D(y) = (-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; +\infty)$.

б) Функція визначена, якщо $x^2 - x \neq 0$, тоді $x(x-1) \neq 0$;

звідси $\begin{cases} x \neq 0; \\ x \neq 1. \end{cases}$

Отже, $x \in (-\infty; 0) \cup (0; 1) \cup (1; +\infty)$.

Відповідь. $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; 1) \cup (1; +\infty)$.

в) Функція визначена, якщо $4 - 2x \geq 0$, тоді $-2x \geq -4$; $x \leq 2$. Отже, $x \in (-\infty; 2]$.

Відповідь. $D(y) = (-\infty; 2]$.

г) Функція визначена, якщо $\dfrac{3x-x^2}{x-1} > 0$.

Розв'яжемо отриману нерівність методом інтервалів.

Розглянемо функцію $y = \dfrac{3x-x^2}{x-1}$, $D(y) = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.

Знайдемо нулі даної функції: $\dfrac{3x - x^2}{x - 1} = 0;$

$$\begin{cases} 3x - x^2 = 0, \\ x - 1 \neq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x(3 - x) = 0, \\ x \neq 1; \end{cases} \quad \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = 3, \end{array}\right. \\ x \neq 1. \end{array}\right.$$

Нанесемо на координатну пряму область визначення функції та її нулі й визначаємо знак функції на кожному з утворених проміжків (рис. 90):

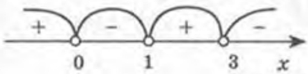


Рис. 90

$$y(-1) = \frac{3 \cdot (-1) - (-1)^2}{-1 - 1} = \frac{-3 - 1}{-2} > 0;$$

$$y(0,5) = \frac{3 \cdot 0,5 - 0,5^2}{0,5 - 1} < 0;$$

$$y(1,5) = \frac{3 \cdot 1,5 - 1,5^2}{1,5 - 1} > 0;$$

$$y(4) = \frac{3 \cdot 4 - 4^2}{4 - 1} < 0.$$

Отже, $\dfrac{3x - x^2}{x - 1} > 0$, якщо $x \in (-\infty; 0) \cup (1; 3)$.

Відповідь. $D(y) = (-\infty; 0) \cup (1; 3)$.

д) Функція визначена за умови, що

Рис. 91

$$\begin{cases} 2 - x \geq 0; \\ 2 + x \geq 0. \end{cases} \text{ Тоді}$$

$$\begin{cases} -x \geq -2, \\ x \geq -2; \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq 2, \\ x \geq -2. \end{cases}$$

Отже, $x \in [-2; 2]$ (рис. 91).

Відповідь. $D(y) = [-2; 2]$.

е) Функція визначена, якщо x задовольняє систему:

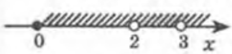


Рис. 92

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ x^2 - 5x + 6 \neq 0. \end{cases} \text{ Тоді } \begin{cases} x \geq 0, \\ x \neq 2, \\ x \neq 3. \end{cases}$$

Отже, $x \in [0; 2) \cup (2; 3) \cup (3; +\infty)$ (рис. 92).

Відповідь. $D(y) = [0; 2) \cup (2; 3) \cup (3; +\infty)$.

Приклад 2. Знайти область значень функції:

а) $y = 3\sqrt{x} + 5$; б) $y = 5 - 2\sqrt{x}$; в) $y = -x^2 - 4x + 2$.

Розв'язання.

а) $\sqrt{x} \ge 0$; $3\sqrt{x} \ge 0$; $3\sqrt{x} + 5 \ge 5$.

Відповідь. $E(y) = [5; +\infty)$.

б) $\sqrt{x} \ge 0$; $-2\sqrt{x} \le 0$; $-2\sqrt{x} + 5 \le 5$.

Відповідь. $E(y) = (-\infty; 5]$.

в) $-x^2 - 4x + 2 = -(x^2 + 4x - 2) = -(x^2 + 2x \cdot 2 + 4 - 4 - 2) =$

$= -((x+2)^2 - 6) = -(x+2)^2 + 6$;

$(x+2)^2 \ge 0$; $-(x+2)^2 \le 0$; $-(x+2)^2 + 6 \le 6$.

Відповідь. $E(y) = (-\infty; 6]$.

Приклад 3. Дослідити на парність (непарність) функції:

а) $y = 5x^4 - 6x^8 - x^2$; б) $y = 3x^7 - 2x^3 + x$;

в) $y = \dfrac{3x^2 - 2}{x^2 - 25}$; г) $y = \dfrac{6x^2 - x^5}{x - 1}$.

Розв'язання.

а) $D(y) = (-\infty; +\infty)$;

$y(-x) = 5 \cdot (-x)^4 - 6 \cdot (-x)^8 - (-x)^2 = 5x^4 - 6x^8 - x^2 = y(x)$.

Отже, функція $y = 5x^4 - 6x^8 - x^2$ — парна.

б) $D(y) = (-\infty; +\infty)$;

$y(-x) = 3 \cdot (-x)^7 - 2 \cdot (-x)^3 - x = -3x^7 + 2x^3 - x =$

$= -(3x^7 - 2x^3 + x) = -y(x)$.

Отже, функція $y = 3x^7 - 2x^3 + x$ — непарна.

в) $D(y) = (-\infty; -5) \cup (-5; 5) \cup (5; +\infty)$;

$$y(-x) = \frac{3 \cdot (-x)^2 - 2}{(-x)^2 - 25} = \frac{3x^2 - 2}{x^2 - 25} = y(x).$$

Отже, функція $y = \dfrac{3x^2 - 2}{x^2 - 25}$ — парна.

г) $D(y) = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$. Оскільки область визначення не симетрична відносно початку координат, то функція $y = \dfrac{6x^2 - x^5}{x - 1}$ ні парна, ні непарна.

Приклад 3. Побудувати графік функції $y = -x^2 + 4x - 3$ та охарактеризувати її властивості.

Розв'язання.

Графіком функції $y = -x^2 + 4x - 3$ є парабола, вітки якої направлені вниз.

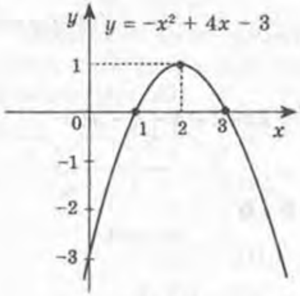


Рис. 93

Знайдемо нулі функції:

$-x^2 + 4x - 3 = 0;\ x^2 - 4x + 3 = 0;$

$\left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = 3. \end{array}\right.$

$y(0) = -0^2 + 4 \cdot 0 - 3 = -3.$

Отже, точка $(0; -3)$ — точка перетину параболи з віссю ординат.

Знайдемо координати $(m; n)$ вершини параболи:

$m = -\frac{b}{2a} = \frac{-4}{-2} = 2;$

$n = y(m) = -2^2 + 4 \cdot 2 - 3 = -4 + 8 - 3 = -4 + 5 = 1.$

Отже, $(2; 1)$ — вершина параболи.

Графік функції $y = -x^2 + 4x - 3$ подано на рисунку 93.

Властивості функції $y = -x^2 + 4x - 3$:

1) $D(y) = (-\infty; +\infty);$
2) $E(y) = (-\infty; 1];$
3) $x = 1,\ x = 3$ — нулі функції;
4) функція зростає на проміжку $(-\infty; 2)$; функція спадає на проміжку $(2; +\infty)$;
5) $-x^2 + 4x - 3 > 0$, якщо $x \in (1; 3)$;
6) $-x^2 + 4x - 3 < 0$, якщо $x \in (-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$.

Приклад 4. Написати рівняння прямої, яка проходить через точки $(-2; 1); (2; -3)$.

Розв'язання.

Рівняння прямої має вид: $y = kx + b$, тому

$\begin{cases} -2k + b = 1, \\ 2k + b = -3. \end{cases}$

Додавши почленно ліві й праві частини рівнянь, маємо:

$2b = -2;\ b = -1.$

Тоді $2k - 1 = -3$; $2k = -2$; $k = -1$.

Отже, рівняння шуканої прямої $y = -x - 1$.

Відповідь. $y = -x - 1$.

Вправи для самостійного розв'язування

Перевір себе

1. Знайти область визначення функції:

1) $y = \dfrac{10x - 7}{36 - x^2}$; 2) $y = 5x^3 - 7x^2 + x - 7$;

3) $y = \dfrac{3x - 2}{(1 - x)(3 + x)x}$; 4) $y = \dfrac{6x + 17}{x^2 + 2}$;

5) $y = \sqrt{6x - 12}$; 6) $y = \sqrt{16 - 4x}$;

7) $y = \dfrac{1}{x^2 - x - 12} + \dfrac{1}{x}$; 8) $y = \sqrt{2x - 4} + \sqrt{x - 9}$;

9) $y = \dfrac{1}{x^2 + 3x - 4} + \sqrt{1 - x}$; 10) $y = \dfrac{\sqrt{x + 5}}{x}$;

11) $y = \sqrt{x^2 + 3}$; 12) $y = \dfrac{\sqrt{x}}{|x| - 4}$;

13) $y = \sqrt{x^2 + x + 1}$; 14) $y = \dfrac{\sqrt{x^2 - x}}{x + 1}$;

15) $y = \sqrt{\dfrac{2x}{2 - x} + 1}$; 16) $y = \dfrac{\sqrt{7 - 15x - 22x^2}}{x + 3}$;

17) $y = \lg \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 - x - 2}$; 18) $y = \dfrac{\log_5 (x + 1)(x - 5)}{x - 6}$.

2. Знайти область значень функції:

1) $y = 3x - 2$; 2) $y = \cos 2x$;

3) $y = -2\sin x$; 4) $y = 4\,\mathrm{tg}\, 3x$;

5) $y = 6\sqrt{x} + 2$; 6) $y = 3 - 4\sqrt{x}$;

7) $y = -2\sqrt{x} - 5$; 8) $y = -6 - 3\sqrt{x}$;

9) $y = x^2 + 6x - 4$; 10) $y = -x^2 - 3x + 5$;

11) $y = 2x^2 - 8x + 1$; 12) $y = -3x^2 - 7x - 1$;

13) $y = \sqrt{x-5}$; 14) $y = 2\sqrt{x+4} - 6$;

15) $y = 7 - 4\sqrt{2x-4}$.

3. Дослідити функцію на парність (непарність):

1) $y = x + 2$; 2) $y = x^2 - 4x^8 + x^3$;

3) $y = x^{10} - 3x^4 + 2x^8$; 4) $y = x^7 - 5x^3 + 4x - 2$;

5) $y = \dfrac{3x^2 - 5x^8}{100 - x^2}$; 6) $y = \dfrac{6x^2 + x^4}{x - 2}$;

7) $y = 2x^2 - \sin 8x$; 8) $y = 4x^3 - \sin 2x$;

9) $y = \cos 5x + 4x^4$; 10) $y = \operatorname{tg} 3x - x^3 + 2x$.

4. Побудувати графіки функцій та охарактеризувати їхні властивості:

1) $y = 5x - 3$; 2) $y = -\dfrac{x}{2} + 1$;

3) $y = -\dfrac{8}{x}$; 4) $y = \dfrac{4}{x^2}$;

5) $y = 2x^2 - 3x + 2$; 6) $y = -x^2 + 7x - 10$;

7) $y = 3x^2 + 6x + 5$; 8) $y = -\dfrac{1}{2}x^2 - x + 4$;

9) $y = -2x^2 - 4x - 5$; 10) $y = \dfrac{1}{3}x^2 - \dfrac{2}{3}x - 1$.

5. Написати рівняння прямої, яка проходить через точки:

1) $(-4; -1)$; $(2; -3)$; 2) $(5; 2)$; $(-6; 3)$;

3) $(-3; 5)$; $(2; -4)$; 4) $(-8; 4)$; $(-2; -1)$.

6. Парабола $y = x^2 + bx + c$ проходить через точки $A(-1; 3)$ і $B(1; 3)$. Знайти коефіцієнти b і c.

§ 2. Перетворення графіків функції

Це треба знати!

1. Побудова графіка функції $y = -f(x)$.

Графік функції $y = -f(x)$ можна одержати з графіка функції $y = f(x)$ його симетричним відображенням відносно осі абсцис (рис. 94).

2. Побудова графіка функції $y = f(-x)$.

Графік функції $y = f(-x)$ можна одержати з графіка функції $y = f(x)$ його симетричним відображенням відносно осі ординат (рис. 95).

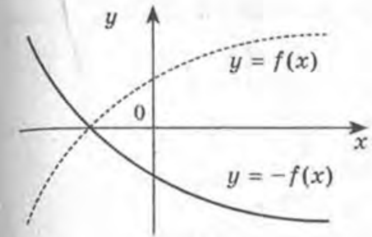


Рис. 94

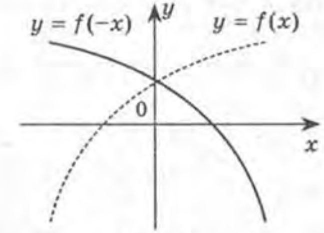


Рис. 95

3. Побудова графіка функції $y = f(x + a)$, $a > 0$.

Графік функції $y = f(x + a)$ можна одержати паралельним перенесенням графіка функції $y = f(x)$ уздовж осі абсцис на a одиниць вліво (рис. 96).

$y = f(x + a)$, $a > 0$ $y = f(x)$

Графік функції $y = f(x - a)$ можна одержати паралельним перенесенням графіка функції $y = f(x)$ уздовж осі абсцис на a одиниць вправо (рис. 97).

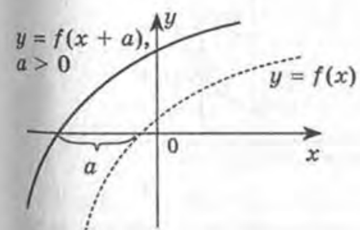


Рис. 96

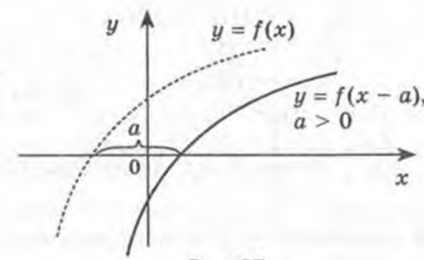


Рис. 97

4. Побудова графіка функції $y = f(x) \pm b$, $b > 0$.

Графік функції $y = f(x) + b$ можна одержати паралельним перенесенням графіка функції $y = f(x)$ уздовж осі ординат на b одиниць угору (рис. 98).

Графік функції $y = f(x) - b$ можна одержати паралельним перенесенням графіка функції $y = f(x)$ уздовж осі ординат на b одиниць униз (рис. 99).

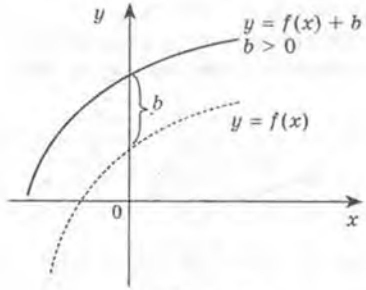


Рис. 98

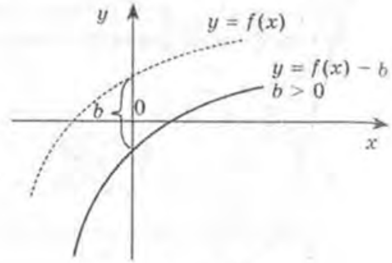
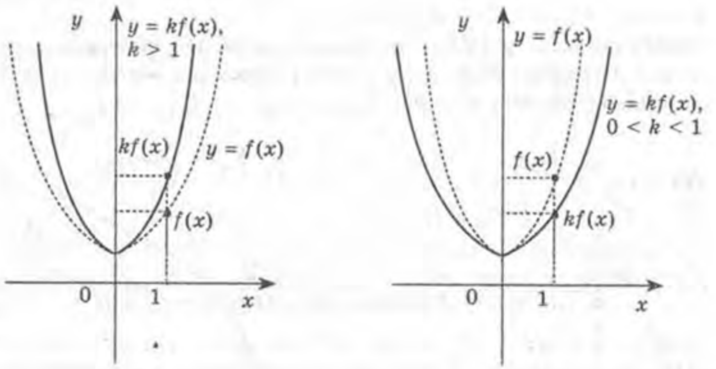


Рис. 99

5. Побудова графіка функції $y = kf(x)$, $k > 0$.

Графік функції $y = kf(x)$ $(k > 0)$ одержується з графіка функції $y = f(x)$ його розтягуванням (при $k > 1$ розтяг у k разів) або стискуванням (при $0 < k < 1$ стиск у $\frac{1}{k}$ разів) уздовж осі ординат (рис. 100).

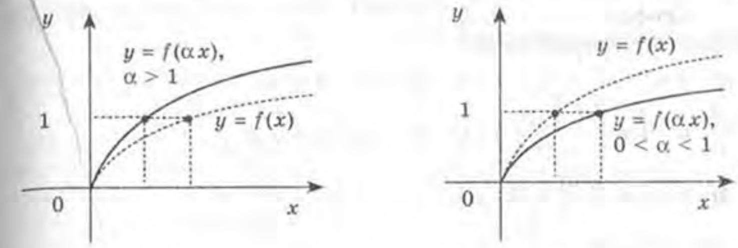


а) б)

Рис. 100

6. Побудова графіка функції $y = f(\alpha x)$, $\alpha > 0$.

Графік функції $y = f(\alpha x)$, $(\alpha > 0)$ одержується з графіка функції $y = f(x)$ його розтягуванням (при $0 < \alpha < 1$ розтяг у $\frac{1}{\alpha}$ разів) або стискуванням (при $\alpha > 1$ стиск у α разів) вздовж осі абсцис (рис. 101).

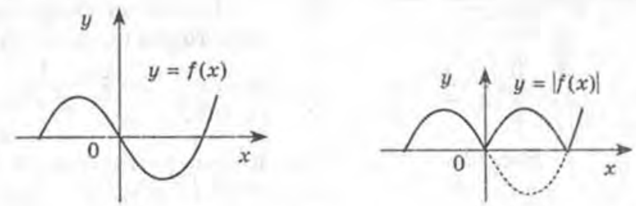


а) б)

Рис. 101

7. Побудова графіка функції $y = |f(x)|$.

Графік функції $y = |f(x)|$ може бути побудований так: та частина графіка функції $y = f(x)$, яка лежить вище осі абсцис (і на самій осі) залишається без зміни, а та частина, яка лежить нижче осі абсцис, відображається симетрично відносно цієї осі (рис. 102).



а) б)

Рис. 102

8. Побудова графіка функції $y = f(|x|)$.

Графік функції $y = f(|x|)$ може бути побудований так: та частина графіка функції $y = f(x)$, яка лежить праворуч від осі абсцис (і на самій осі), залишається без зміни, і саме ця частина відображається симетрично відносно осі ординат (рис. 103).

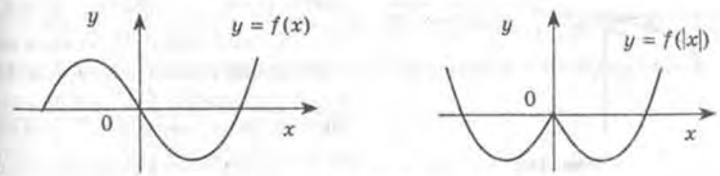


Рис. 103

Самовчитель

Приклад 1. Побудувати схематично графіки функцій:

а) $y = 2 - \dfrac{1}{x+2}$; б) $y = \sqrt{x+4} - 2$;

в) $y = \log_2(x-2) + 1$; г) $y = \sqrt{4-x} + 2$;

д) $y = 2\sin\left(\dfrac{3\pi}{4} - 3x\right)$.

Розв'язання.

а) Графік функції $y = 2 - \dfrac{1}{x+2}$ одержуємо із графіка функції $y = -\dfrac{1}{x}$ шляхом паралельного перенесення його на 2 одиниці вліво вздовж осі OX та паралельного перенесення на 2 одиниці вгору вздовж осі OY (рис. 104).

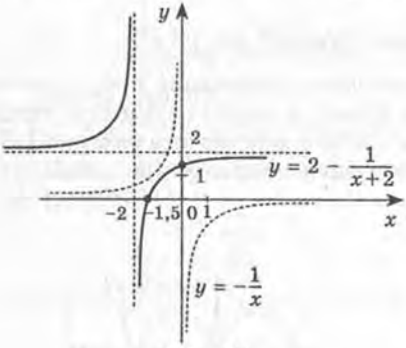


Рис. 104

Додатково знайдемо абсцису точки перетину графіка функції $y = 2 - \dfrac{1}{x+2}$ з віссю OX:

$$2 - \frac{1}{x+2} = 0;$$

$$\frac{1}{x+2} = 2;$$

$$2x + 4 = 1;\ x = -1,5;$$

та знайдемо ординату точки перетину графіка з віссю OY:

$$y(0) = 2 - \frac{1}{2} = 1,5.$$

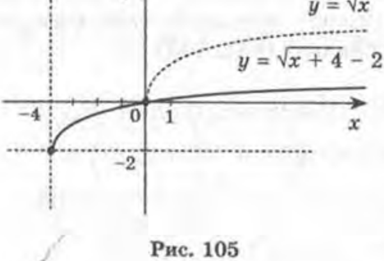


Рис. 105

б) Графік функції $y = \sqrt{x+4} - 2$ одержуємо з графіка функції $y = \sqrt{x}$ шляхом паралельного перенесення його на 4 одиниці вліво вздовж осі OX та паралельного перенесення на 2 одиниці вниз вздовж осі OY (рис. 105).

в) Графік функції $y=\log_2(x-2)+1$ одержуємо з графіка функції $y=\log_2 x$ шляхом паралельного перенесення його на 2 одиниці вправо вздовж осі OX та паралельного перенесення на 1 одиницю вгору вздовж осі OY (рис. 106).

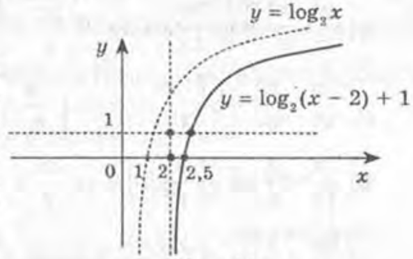


Рис. 106

г) Графік функції $y=\sqrt{4-x}+2=\sqrt{-(x-4)}+2$ одержуємо з графіка функції $y=\sqrt{-x}$ шляхом паралельного перенесення його на 4 одиниці вправо вздовж осі OX та паралельного перенесення на 2 одиниці вгору вздовж осі OY (рис. 107).

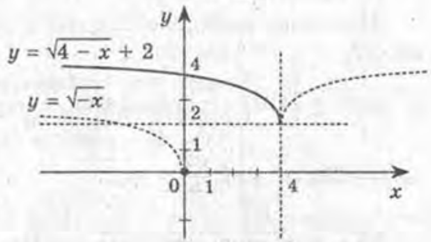


Рис. 107

д) $y=2\sin\left(\frac{3\pi}{4}-3x\right)=-2\sin\left(3x-\frac{3\pi}{4}\right)$ — це періодична функція з найменшим додатним періодом $T=\frac{2\pi}{3}$.

Знайдемо один із нулів функції:

$3x-\frac{3\pi}{4}=0;\ \ 3x=\frac{3\pi}{4};\ \ x=\frac{3\pi}{4}:3=\frac{\pi}{4}$

та сусідній нуль: $\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{3}=\frac{11\pi}{12}$.

Побудуємо графік функції $y=2\sin\left(3x-\frac{3\pi}{4}\right)$.

Поділимо відрізок $\left[\frac{\pi}{4};\frac{11\pi}{12}\right]$ на чотири рівних частини і побудуємо на ньому графік функції $y=2\sin\left(3x-\frac{3\pi}{4}\right)$, а потім паралельно перенесемо його на всю числову пряму.

Оскільки $\frac{T}{4}=\frac{2\pi}{3}:4=\frac{\pi}{6}$, тоді

$y\left(\frac{\pi}{4}\right)=2\sin\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{3\pi}{4}\right)=0;$

$$y\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)=y\left(\frac{5\pi}{12}\right)=2\sin\left(\frac{5\pi}{4}-\frac{3\pi}{4}\right)=2\sin\frac{\pi}{2}=2;$$

$$y\left(\frac{5\pi}{12}+\frac{\pi}{6}\right)=y\left(\frac{7\pi}{12}\right)=2\sin\left(\frac{7\pi}{4}-\frac{3\pi}{4}\right)=2\sin\pi=0;$$

$$y\left(\frac{7\pi}{12}+\frac{\pi}{6}\right)=y\left(\frac{9\pi}{12}\right)=2\sin\frac{3\pi}{2}=-2;$$

$$y\left(\frac{9\pi}{12}+\frac{\pi}{6}\right)=y\left(\frac{11\pi}{12}\right)=2\sin 2\pi=0.$$

Додатково знайдемо ординату точки перетину графіка з віссю OY.

$$y(0)=2\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)=-2\sin\left(\frac{4\pi-\pi}{4}\right)=-2\sin\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=$$

$$=-2\sin\frac{\pi}{4}=-2\frac{\sqrt{2}}{2}=-\sqrt{2}.$$

Для того щоб отримати графік функції $y=-2\sin\left(3x-\frac{3\pi}{4}\right)$, треба графік функції $y=2\sin\left(3x-\frac{3\pi}{4}\right)$ симетрично відобразити відносно осі абсцис (рис. 108).

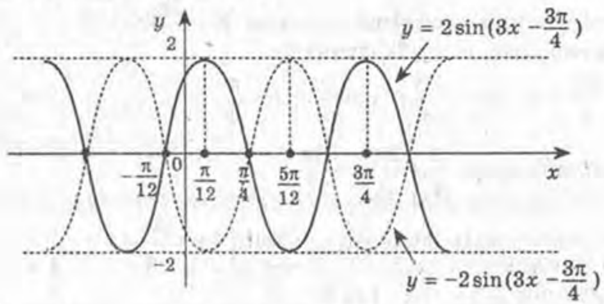


Рис. 108

Приклад 2. Побудувати графіки функцій:

а) $y=|x^2+4x+3|$; б) $y=x^2+4|x|+3$.

Розв'язання.

Побудуємо графік функції $y=x^2+4x+3$, не зважаючи уваги на модуль. Графіком функції $y=x^2+4x+3$ є парабола, вітки якої напрямлені вгору. Знайдемо нулі функції.

$x^2+4x+3=0;$

$x_1=-1; x_2=-3.$

Знайдемо ординату точки перетину графіка функції з віссю OY:

$y(0)=0^2+4\cdot 0+3=3.$

Знайдемо координати $(m;n)$ вершини параболи:

$$m=\frac{-b}{2a}=\frac{-4}{2}=-2;$$

$$n=y(-2)=(-2)^2+4\cdot(-2)+3=4-8+3=-1.$$

Отже, $(-2;-1)$ — вершина параболи.

а) Для побудови графіка функції $y=|x^2+4x+3|$ частину графіка функції $y=x^2+4x+3$ у верхній півплощині та на осі OX залишаємо без змін, а замість частини графіка в нижній півплощині будуємо графік, симетричний відносно осі OX (рис. 109).

Рис. 109

б) Для побудови графіка функції $y=x^2+4|x|+3$ частину графіка функції $y=x^2+4x+3$ у правій півплощині та на осі OY залишаємо без змін, і цю частину графіка відображаємо симетрично відносно осі OY (рис. 110).

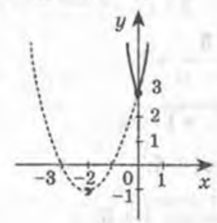


Рис. 110

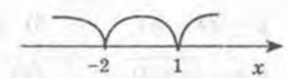


Рис. 111

Приклад 3. Побудувати графік функції $y=|x-1|-|x+2|$.

Розв'язання.

Знайдемо нулі підмодульних виразів: $x-1=0$ або $x+2=0$; $x=1$ або $x=-2$.

Знайдені нулі розбивають числову пряму на три проміжки (рис. 111). Розглянемо функцію на кожному проміжку:

1) Якщо $x\in(-\infty;-2)$,

то $y=-(x-1)+(x+2)=-x+1+x+2=3$.

2) Якщо $x\in[-2;1]$,

то $y=-(x-1)-(x+2)=-x+1-x-2=-2x-1$.

3) Якщо $x \in (1; +\infty)$,

то $y = x - 1 - (x + 2) = x - 1 - x - 2 = -3$.

Графік функції $y = |x - 1| - |x + 2|$ подано на рисунку 112.

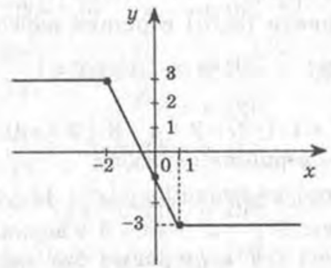


Рис. 112

Перевір себе

Вправи для самостійного розв'язування

Побудувати графіки функцій:

1) $y = \sqrt{x-2} + 1$; 2) $y = \dfrac{4}{x-2} - 1$;

3) $y = \dfrac{3}{x+1} + 2$; 4) $y = \dfrac{3}{2-x} + 1$;

5) $y = \sqrt{4-x} + 3$; 6) $y = \sqrt{x+1} - 4$;

7) $y = |2x + 6|$; 8) $y = 2|x| + 6$;

9) $y = -\sqrt{x+2}$; 10) $y = -\sqrt{x-1} + 3$;

11) $y = \left|\dfrac{2}{x-2}\right|$; 12) $y = \dfrac{2}{|x| - 2}$;

13) $y = |x^2 - 4|$; 14) $y = |x^2 - 2x - 3|$;

15) $y = x^2 - 2|x| - 3$; 16) $y = \begin{cases} x^2, \text{ якщо } -2 \le x < 0, \\ -x^2, \text{ якщо } 0 \le x \le 2; \end{cases}$

17) $y = \log_{\frac{1}{2}}(x+2) - 1$; 18) $y = \log_3(1-x) + 2$;

19) $y = |\log_{0,2}(x-1)|$; 20) $y = 3\cos\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right)$;

21) $y = \sin\left(2x + \dfrac{\pi}{4}\right)$; 22) $y = \cos x - |\cos x|$;

23) $y = \dfrac{\sin x}{|\sin x|}$; 24) $y = \operatorname{tg} 4x$;

25) $y = |2 - x| + |x + 3|$; 26) $y = |4 - x| - |5 + x|$;

27) $y = |-x^2 - 6x - 4|$; 28) $y = -x^2 - 6|x| - 4$;

29) $y = |-2x^2 + 8x|$; 30) $y = -2x^2 + 8|x|$;

31) $y = 2^{|x|}$; 32) $y = 3^{\log_3|x|}$;

33) $y = \log_{\frac{1}{2}}|x|$; 34) $y = |\lg x|$;

35) $y = 5^{\log_5(x-3)}$; 36) $y = |\lg(x-1)|$;

37) $y = \log_2(1-x)$; 38) $y = |\log_2|2-x||$;

39) $y = \left|\log_{\frac{1}{3}}(3 - |x|)\right|$; 40) $y = \log_{|x|} 2$;

41) $y = \dfrac{3}{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{4} - 2x\right)$; 42) $y = 2\operatorname{tg}\left(-2x + \dfrac{2\pi}{3}\right)$;

43) $y = \dfrac{1}{5}\operatorname{ctg}\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{4}\right)$; 44) $y = |2\sin 3x|$;

45) $y = |\sin x| + \sin x$.

РОЗДІЛ 5. ПРОГРЕСІЇ

§ 1. Арифметична прогресія

Це треба знати!

Числова послідовність a_1; a_2; a_3; ...; a_n, ... називається ***арифметичною прогресією***, якщо кожний її член, починаючи із другого, дорівнює попередньому члену, до якого додається одне й те саме число d, де d — ***різниця арифметичної прогресії***, a_1 — перший член, n — число членів, a_n — n-й член.

Для будь-якого натурального n виконується рівність

$a_{n+1} = a_n + d$.

Звідси, $d = a_{n+1} - a_n$.

$a_n = a_1 + d\,(n - 1)$ — формула n-го члена арифметичної прогресії.

$S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2}n = \dfrac{2a_1 + d(n-1)}{2}n$ — формула суми n перших членів арифметичної прогресії.

Властивості членів арифметичної прогресії:

1) Кожний середній член арифметичнії прогресії дорівнює півсумі рівновіддалених від нього членів, тобто дорівнює середньому арифметичному рівновіддалених від нього членів:

$a_m = \dfrac{a_{m-k} + a_{m+k}}{2}$, $m > k$, $k = 1, 2, 3, \ldots$.

2) У скінченній арифметичний прогресії суми членів, рівновіддалених від її кінців, рівні між собою і дорівнюють сумі крайніх членів, тобто

$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = \ldots = a_k + a_{n-k+1} = \ldots =$
$= 2a_1 + d(n-1)$.

Самовчитель

Приклад 1. Знайти дев'ятий член арифметичної прогресії (a_n), якщо $a_4 = 9$, $a_{17} = -17$.

Розв'язання.

Оскільки

$\begin{cases} a_4 = a_1 + d\cdot(4-1), \\ a_{17} = a_1 + d\cdot(17-1); \end{cases}$ і $\begin{cases} a_4 = 9, \\ a_{17} = -17, \end{cases}$ то

$\begin{cases} a_1 + 3d = 9, \\ a_1 + 16d = -17, \end{cases}$

тоді $\begin{cases} a_1 + 3d = 9, \\ -a_1 - 16d = 17, \end{cases}$ звідси

$-13d = 26$; $d = 26 : (-13)$; $d = -2$.

Тоді $a_1 + 3\cdot(-2) = 9$; $a_1 - 6 = 9$; $a_1 = 9 + 6$; $a_1 = 15$.

Звідси $a_9 = a_1 + d(9-1) = a_1 + 8d = 15 + 8\cdot(-2) = 15 - 16 = -1$.

Відповідь. -1.

Приклад 2. Чи є членом арифметичної прогресії -2; -5; -8; ... число -84; число -152?

Розв'язання.

$d = -5 - (-2) = -5 + 2 = -3$.

Нехай -84 є n-м членом даної арифметичної прогресії, тоді $-84 = -2 - 3(n-1)$; $-2 - 3n + 3 = -84$;

$-3n = -84 + 2 - 3$; $-3n = -85$;

$n = \dfrac{85}{3} = 28\dfrac{1}{3}$. Оскільки $28\dfrac{1}{3}$ не є натуральним числом, то число -84 не є членом даної арифметичної прогресії.

Відповідь. -84 не є членом арифметичної прогресії -2; -5; -8; ... .

Нехай -152 є n-м членом даної арифметичної прогресії, тоді $-152 = -2 - 3(n-1)$; $-2 - 3n + 3 = -152$; $-3n = -152 + 2 - 3$; $-3n = -153$;

$n = \dfrac{153}{3} = 51$. Оскільки 51 є натуральним числом, то число -152 є 51-м членом даної арифметичної прогресії.

Відповідь. -152 є членом арифметичної прогресії -2; -5; -8; ... .

Приклад 3. Між числами 7 і 35 розмістити 6 чисел, які з даними числами утворили б арифметичну прогресію.

Розв'язання.

$a_1 = 7$, $a_n = 35$; $n = 8$.

Отже, $35 = 7 + d\,(8 - 1)$; $35 = 7 + 7d$; $7d = 35 - 7$; $7d = 28$; $d = 28 : 7$; $d = 4$.

$a_2 = 7 + 4 = 11$; $a_3 = 11 + 4 = 15$; $a_4 = 15 + 4 = 19$; $a_5 = 19 + 4 = 23$; $a_6 = 23 + 4 = 27$; $a_7 = 27 + 4 = 31$.

Відповідь. 7; 11; 15; 19; 23; 27; 31; 35.

Приклад 4. Знайти суму 20-ти перших членів арифметичної прогресії, якщо $a_2 + a_{19} = 78$.

Розв'язання.

$S_{20} = \frac{a_1 + a_{20}}{2} 20;$

Використовуючи властивість членів арифметичної прогресії, маємо $a_1 + a_{20} = a_2 + a_{19} = 78$.

Отже, $S_{20} = \frac{78}{2} 20 = 78 \cdot 10 = 780.$

Відповідь. 780.

Приклад 5. Розв'язати рівняння $1 + 4 + 7 + \ldots + x = 117$.

Розв'язання.

Розглянемо арифметичну прогресію 1; 4; 7; ..; x.

$d = 3$; $a_n = x$; $a_1 = 1$.

$x = 1 + 3(n-1);\quad x = 1 + 3n - 3;\quad 3n = x - 1 + 3;$

$3n = x + 2;\quad n = \frac{x+2}{3}.$

За формулою суми n перших членів арифметичної прогресії маємо:

$117 = \frac{1+x}{2} \cdot \frac{x+2}{3};\quad \frac{(1+x)(x+2)}{6} = 117;\quad (1+x)(x+2) = 702;$

$x^2 + 3x + 2 - 702 = 0;\quad x^2 + 3x - 700 = 0;$

$D = 9 + 2800 = 2809.$

$x_1 = \frac{-3+53}{2} = \frac{50}{2} = 25;$

$x_2 = \frac{-3-53}{2} = -\frac{56}{2} = -28$ (не є коренем рівняння).

Відповідь. 25.

Приклад 6. Знайти арифметичну прогресію, у якій сума перших трьох членів дорівнює 27, а сума квадратів цих же трьох членів дорівнює 275.

Розв'язання.

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 27, \\ a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 275. \end{cases}$$

Крім цього,

$\frac{a_1 + a_3}{2} 3 = 27;\quad \frac{a_1 + a_3}{2} = 9;\quad a_1 + a_3 = 18;$

Оскільки $a_1 + a_2 + a_3 = 27$, то $18 + a_2 = 27$; $a_2 = 27 - 18$; $a_2 = 9$.

$$\begin{cases} a_1 + a_3 = 18, \\ a_1^2 + a_3^2 + 81 = 275; \end{cases} \quad \begin{cases} a_1 + a_3 = 18, \\ a_1^2 + a_3^2 = 194; \end{cases} \quad (a_1 + a_3)^2 = 324;$$

$a_1^2 + 2a_1 \cdot a_3 + a_3^2 = 324;\quad 194 + 2a_1 \cdot a_3 = 324;\quad 2a_1 \cdot a_3 = 324 - 194;$

$2a_1 \cdot a_3 = 130;\quad a_1 \cdot a_3 = 130 : 2;\quad a_1 \cdot a_3 = 65.$

$$\begin{cases} a_1 \cdot a_3 = 65, \\ a_1 + a_3 = 18. \end{cases}$$

Звідси $a_1 = 5$; $a_3 = 13$, або $a_1 = 13$; $a_3 = 5$.

Відповідь. 5; 9; 13; ...; 13; 9; 5...

Приклад 7. Знайти суму натуральних чисел, кратних 7 і не більших 145.

Розв'язання.

$7n \le 145;\quad n \le \frac{145}{7} = 20\frac{5}{7}.$

Отже, $a_1 = 7 \cdot 1 = 7$; $n = 20$; $a_{20} = 7 \cdot 20 = 140$;

$S_{20} = \frac{7 + 140}{2} \cdot 20 = 147 \cdot 10 = 1470.$

Вправи для самостійного розв'язування

Перевір себе

1) Сума трьох чисел, які утворюють арифметичну прогресію, дорівнює 15, а добуток першого і другого дорівнює 40. Знайти ці числа.

2) Сума другого й четвертого членів зростаючої арифметичної прогресії дорівнює 16, а добуток другого й четвертого членів дорівнює 28. Знайти цю прогресію. Скільки членів цієї прогресії треба взяти, щоб у сумі дістати 20?

3) Знайти суму двадцяти перших членів арифметичної прогресії (a_n), у якої $a_1 + a_4 + a_7 = 45$, а $a_4 \cdot a_6 = 315$.

4) Знайти суму непарних натуральних чисел від 17 до 117 включно.

5) Знайти суму парних натуральних чисел від 24 до 120 включно.

6) Знайти суму непарних натуральних чисел, що не перевищують 71.

7) Чи є число 130 членом арифметичної прогресії:
а) 4; 7; 10; ... ;
б) 23; 34; 45; ... .

8) Знайти перший член і різницю арифметичної прогресії (a_n), якщо $a_{10} = 33$; $S_8 = 88$.

9) Знайти арифметичну прогресію з різницею 4, знаючи, що сума перших п'яти її членів утричі менша суми наступних п'яти членів.

10) Крайні члени арифметичної прогресії, що має 7 членів, дорівнюють 11 і 35. Скільки членів у другій арифметичній прогресії, крайні члени якої 38 і 13, якщо четверті члени обох прогресій однакові.

11) Сума перших чотирьох членів арифметичної прогресії 124, сума останніх чотирьох членів 156. Сума всіх членів дорівнює 240. Знайти цю прогресію.

12) Знайти арифметичну прогресію, перший член якої дорівнює 1, причому сума перших п'яти членів дорівнює $\frac{1}{4}$ суми наступних п'яти членів.

13) Знайти суму 11-ти перших членів арифметичної прогресії, якщо $a_3 + a_9 = 8$.

14) Знайти значення x, при яких послідовність $\sqrt{x-1}$, $\sqrt{5x-1}$, $\sqrt{12x+1}$ є арифметичною прогресією.

15) Розв'язати рівняння
$(x+1)+(x+4)+(x+7)+\ldots+(x+28)=155$.

§ 2. Геометрична прогресія

Це треба знати!

Числова послідовність b_1; b_2; b_3; ...; b_n; ..., у якій перший член $b_1 \neq 0$, називається ***геометричною прогресією***, якщо кожний її член, починаючи із другого, дорівнює попередньому, помноженому на одне й те саме число q, відмінне від нуля, де q — ***знаменник геометричної прогресії***, n — число членів, b_n — n-ий член.

$b_{n+1} = b_n \cdot q$. Звідси, $q = \frac{b_{n+1}}{b_n}$.

$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$ — формула n-го члена геометричної прогресії;

$S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$ — формула суми n перших членів геометричної прогресії.

$S = \frac{b_1}{1-q}$ — формула суми нескінченної геометричної прогресії, у якій $|q| < 1$.

Властивості членів геометричної прогресії

1) Квадрат кожного середнього члена геометричної прогресії дорівнює добутку рівновіддалених від нього членів, тобто $b_m^2 = b_{m-k} \cdot b_{m+k}$, $m > k$, $k = 1, 2, 3, \ldots$.
2) У скінченній геометричній прогресії добутки членів, рівновіддалених від її кінців, рівні між собою і дорівнюють добутку крайніх членів:
$b_1 \cdot b_n = b_2 \cdot b_{n-1} = b_3 \cdot b_{n-2} = \ldots = b_k \cdot b_{n-k+1} = \ldots = b_1^2 \cdot q^{n-1}$.

Самовчитель

Приклад 1. Знайти суму членів геометричної прогресії (b_n) із четвертого до восьмого включно, якщо $b_1 = 5$; $q = -2$.

Розв'язання.

$n = 5$; $b_4 = b_1 \cdot q^{4-1} = 5 \cdot (-2)^3 = 5 \cdot (-8) = -40$;

$$S = \frac{-40 \cdot (1-(-2)^5)}{1-(-2)} = \frac{-40 \cdot (1+32)}{3} = \frac{-40 \cdot 33}{3} = -40 \cdot 11 = -440.$$

Відповідь. −440.

Приклад 2. Записати число 3,(12) у вигляді звичайного дробу.

Розв'язання.

Число 3,(12) = 3,1212... запишемо у вигляді такої суми:
3,(12) = 3 + 0,12 + 0,0012 + 0,000012 + ...

Доданки 0,12; 0,0012; 0,000012; ... — члени нескінченної геометричної прогресії з першим членом 0,12 і знаменником

$q = \frac{0,0012}{0,12} = \frac{0,12}{12} = 0,01$ $(|q| < 1)$.

Отже, сума цієї прогресії
$S = \frac{0,12}{1-0,01} = \frac{0,12}{0,99} = \frac{12}{99} = \frac{4}{33}$.

Тому $3,(12) = 3 + \frac{4}{33} = 3\frac{4}{33}$.

Відповідь. $3\frac{4}{33}$.

Приклад 3. Знайти перший член і знаменник геометричної прогресії, у якій $b_5 - b_1 = 15$; $b_4 - b_2 = 6$.

Розв'язання.

$$\begin{cases} b_1q^4 - b_1 = 15, \\ b_1q^3 - b_1q = 6; \end{cases} \begin{cases} b_1\left(q^4 - 1\right) = 15, \\ b_1q\left(q^2 - 1\right) = 6; \end{cases} \begin{cases} b_1\left(q^2 - 1\right)\left(q^2 + 1\right) = 15, \\ b_1q\left(q^2 - 1\right) = 6. \end{cases}$$

Поділимо перше рівняння системи на друге:

$$\frac{q^2+1}{q} = \frac{15}{6}; \quad \frac{q^2+1}{q} = \frac{5}{2}; \quad \begin{cases} 2\left(q^2+1\right) = 5q; \\ q \neq 0; \end{cases}$$

$2q^2 - 5q + 2 = 0$; $D = 25 - 16 = 9$;

$q_1 = \frac{5+3}{4} = 2$; $q_2 = \frac{5-3}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

Якщо $q = 2$, то $b_1 = \frac{6}{q^3 - q} = \frac{6}{6} = 1$.

Якщо $q = \frac{1}{2}$, то $b_1 = \frac{6}{\frac{1}{8} - \frac{1}{2}} = \frac{6}{-\frac{3}{8}} = -\frac{48}{3} = -16$.

Відповідь. $b_1 = 1$; $q = 2$; $b_1 = -16$; $q = \frac{1}{2}$.

Приклад 4. Число членів геометричної прогресії парне. Сума її членів, що стоять на парних місцях, удвічі більша суми членів, що стоять на непарних місцях. Знайти знаменник цієї прогресії.

Розв'язання.

$$\frac{b_2 + b_4 + b_6 + \ldots + b_{2n}}{b_1 + b_3 + b_5 + \ldots + b_{2n-1}} = 2;$$

$$\frac{b_1q + b_3q + b_5q + \ldots b_{2n-1}q}{b_1 + b_3 + b_5 + \ldots + b_{2n-1}} = 2;$$

$$\frac{q\left(\cancel{b_1 + b_3 + b_5 + \ldots + b_{2n-1}}\right)^{1}}{\cancel{b_1 + b_3 + b_5 + \ldots b_{2n-1}}_{1}} = 2; \quad q = 2.$$

Відповідь. 2.

Приклад 5. Сума трьох чисел, які утворюють арифметичну прогресію, дорівнює 15. Якщо до цих чисел додати відповідно 1, 4 і 19, то одержимо три числа, які утворюють геометричну прогресію. Знайти ці числа.

Розв'язання.

Нехай a_1; $a_1 + d$; $a_1 + 2d$ — три числа, які утворюють арифметичну прогресію

$a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d = 15$;

$3a_1 + 3d = 15$; $3\left(a_1 + d\right) = 15$;

$a_1 + d = 5$.

Числа $a_1 + 1$; $a_1 + d + 4$ і $a_1 + 2d + 19$ утворюють геометричну прогресію, тобто $\frac{a_1 + d + 4}{a_1 + 1} = \frac{a_1 + 2d + 19}{a_1 + d + 4}$;

$$\begin{cases} a_1 + d = 5, \\ \left(a_1 + 1\right)\left(a_1 + 2d + 19\right) = \left(a_1 + d + 4\right)^2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 = 5 - d, \\ a_1^2 + 2a_1d + 19a_1 + a_1 + 2d + 19 = a_1^2 + d^2 + 16 + 2a_1d + 8a_1 + 8d; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 = 5 - d, \\ d^2 + 6d - 12a_1 - 3 = 0; \end{cases}$$

$d^2 + 6d - 12(5 - d) - 3 = 0$; $d^2 + 18d - 63 = 0$; $d_1 = -21$; $d_2 = 3$;

$$\left[\begin{array}{l} a_1 = 5 - (-21) = 5 + 21 = 26; \\ a_1 = 5 - 3 = 2. \end{array}\right.$$

Відповідь. 26; 5; −16 або 2; 5; 8.

Приклад 6. Розв'язати рівняння $x^2 + x^3 + x^4 + \ldots = \frac{1}{2}$, де $|x| < 1$.

Розв'язання.

$q = \frac{x^3}{x^2} = x$; $\frac{x^2}{1-x} = \frac{1}{2}$; $\begin{cases} 2x^2 = 1 - x, \\ x \neq 1; \end{cases}$

$2x^2 + x - 1 = 0$;

$D = 1 + 8 = 9;$

$x_1 = \dfrac{-1+3}{4} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$; $x_2 = \dfrac{-1-3}{4} = -1$ (не задовольняє умову рівняння).

Відповідь. $\dfrac{1}{2}$.

Перевір себе

Вправи для самостійного розв'язування

1) Знайти суму перших п'яти членів геометричної прогресії:
а) $3; -6; 12; \ldots;$
б) $0{,}2; 0{,}6; 1{,}8.$

2) Знайти перший член геометричної прогресії, у якій $q = \dfrac{1}{2}$, $S_7 = 254$.

3) Знайти суму нескінченної геометричної прогресії:
а) $-10; -4; -\dfrac{8}{5}; \ldots;$
б) $9; -3; 1; \ldots;$
в) $2; 1{,}5; 1{,}125; \ldots;$
г) $1; \dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{4}; \ldots.$

4) Сума всіх членів нескінченно спадної геометричної прогресії, які стоять на непарних місцях, дорівнює 36, а сума всіх членів, що стоять на парних місцях, дорівнює 12. Знайти цю прогресію.

5) Числа $5x - y$, $2x + 3y$, $x + 2y$ утворюють арифметичну прогресію, а числа $(y+1)^2$, $xy + 1$, $(x-1)^2$ — геометричну. Знайти x і y.

6) Знайти перший член і знаменник геометричної прогресії, у якій:
а) $\begin{cases} b_3 - b_1 = 16, \\ b_5 - b_3 = 144; \end{cases}$
б) $\begin{cases} b_5 + b_2 - b_4 = 66, \\ b_6 + b_3 - b_5 = -132. \end{cases}$

7) Якщо до чотирьох чисел, що утворюють геометричну прогресію, додати відповідно 4; 21; 29; 1, то одержимо чотири числа, що утворюють арифметичну прогресію. Знайти ці числа.

8) Сума трьох чисел, що утворюють арифметичну прогресію, дорівнює 3. Якщо до першого й третього членів додати по 4, а до другого додати 3, то одержані числа утворять геометричну прогресію. Знайти ці числа.

9) Три числа, сума яких 26, утворюють геометричну прогресію. Якщо до першого числа додати 1, до другого 6, а до третього 3, то одержані числа утворять арифметичну прогресію. Знайти ці числа.

10) Записати у вигляді звичайного дробу числа:
а) 0,(6); б) 1,(3); в) 0,(25);
г) 0,1(13); д) 6,1(3); е) 0,02(5).

11) Розв'язати рівняння $x + 3x + 5x + \ldots + 21x = x^2 + 120$.

РОЗДІЛ 6. ЕЛЕМЕНТИ МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

§ 1. Границя функції. Асимптоти графіка функції

Це треба знати!

Запис $\lim\limits_{x\to a} f(x) = B$ означає, що B — число, до якого прямує значення функції $f(x)$, коли x прямує до a.

Наприклад, чим ближче до числа 1 вибране значення аргументу на осі абсцис $(x \to 1)$, тим ближче до числа 4 буде значення функції $y = 3x + 1$ на осі ординат (рис. 113), тобто $\lim\limits_{x\to 1}(3x+1) = 4$.

Розглянемо функцію $y = \dfrac{1}{x}$ (рис. 114).

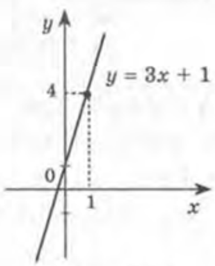


Рис. 113

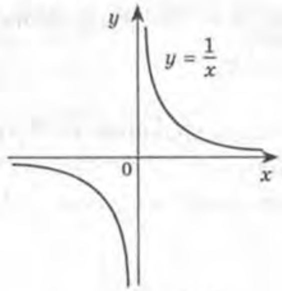


Рис. 114

За допомогою графіка функції $y = \dfrac{1}{x}$ легко помітити, що $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x} = 0$; $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{1}{x} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{1}{x} = -\infty$. Запис $x \to 0+$ означає, що x прямує до нуля справа, $x \to 0-$, відповідно, означає, що x прямує до нуля зліва.

Методи обчислення границь функції

1) Якщо $x = a$ входить в область визначення функції $y = f(x)$, то при $x \to a$ значення $f(x) \to f(a)$, тобто $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$. Такі функції називаються ***неперервними*** в точці a.
2) Якщо існують $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ і $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, то існують границі

$\lim\limits_{x\to a} C\cdot f(x) = C\cdot\lim\limits_{x\to a} f(x)$, де C — постійний множник;

$\lim\limits_{x\to a}\big(f(x) \pm g(x)\big) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x)$;

$\lim\limits_{x\to a}\big(f(x)\cdot g(x)\big) = \lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to a} g(x)$;

$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$;

$\left(\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0\right)$.

Якщо $f(x) = C$, то $\lim\limits_{x\to a} C = C$, де C — деяке число.

3) При обчисленні границь відношень двох многочленів, які залежать від x, при $x \to \infty$ треба обидва члени відношення поділити на x^n, де n — найвищий степінь цих многочленів.
4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$ — перша визначна границя.

Асимптоти графіка $y = f(x)$

1) Пряма $y = b$, де $b = \lim\limits_{x\to\infty} f(x)$, є ***горизонтальною асимптотою*** графіка функції $y = f(x)$ (рис. 115).

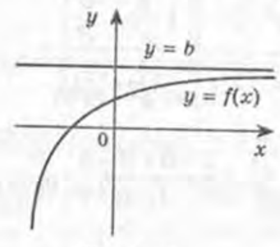


Рис. 115

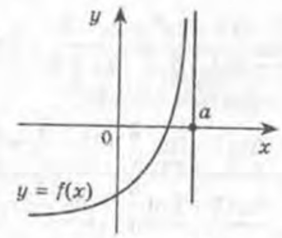


Рис. 116

2) Якщо $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, то кажуть, що пряма $x = a$ є ***вертикальною асимптотою*** графіка функції $y = f(x)$ (рис. 116).
3) Рівняння ***похилої асимптоти*** (рис. 117) $y = kx + b$,

де $k = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$;

$b = \lim\limits_{x\to\infty}\big(f(x) - kx\big)$.

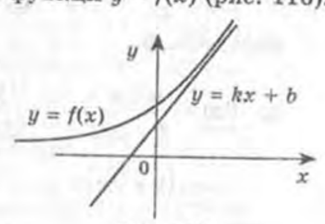


Рис. 117

Самовчитель

Приклад 1. Обчислити границі:

а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+3x-2}{x+4}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2+x-6}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-2x^2+3x-6}{5x^3+3x^3-4x+2}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x}{x}$;

д) $\lim\limits_{x\to 4}=\dfrac{4-x}{2-\sqrt{x}}$.

Розв'язання.

а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+3x-2}{x+4}=\dfrac{(-1)^2+3\cdot(-1)-2}{-1+4}=\dfrac{1-3-2}{3}=-\dfrac{4}{3}=-1\dfrac{1}{3}$.

Відповідь. $-1\dfrac{1}{3}$.

б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2+x-6}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\overset{1}{\cancel{(x-2)}}(x+2)}{\underset{1}{\cancel{(x-2)}}(x+3)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+2}{x+3}=\dfrac{2+2}{2+3}=\dfrac{4}{5}$.

Відповідь. $\dfrac{4}{5}$.

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-2x^2+3x-6}{5x^3+3x^2-4x+2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\overset{1}{\cancel{x^3}}\left(1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x^2}-\dfrac{6}{x^3}\right)}{\underset{1}{\cancel{x^3}}\left(5+\dfrac{3}{x}-\dfrac{4}{x^2}+\dfrac{2}{x^3}\right)}=$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}1-\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3}{x^2}-\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6}{x^3}}{\lim\limits_{x\to\infty}5+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3}{x}-\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4}{x^2}+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{x^3}}=\frac{1-0+0-0}{5+0-0+0}=\frac{1}{5}.$$

Відповідь. $\dfrac{1}{5}$.

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6\sin 6x}{6x}=6\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x}{6x}=6\cdot 1=6$.

Відповідь. 6.

д) $\lim\limits_{x\to 4}=\dfrac{4-x}{2-\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(4-x)(2+\sqrt{x})}{(2-\sqrt{x})(2+\sqrt{x})}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\overset{1}{\cancel{(4-x)}}(2+\sqrt{x})}{\underset{1}{\cancel{4-x}}}=$

$=\lim\limits_{x\to 4}(2+\sqrt{x})=2+\sqrt{4}=2+2=4$.

Відповідь. 4.

Приклад 2. Знайти асимптоти графіка функції $y = x + \dfrac{1}{x}$.

Розв'язання.

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x + \dfrac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to\infty} x + \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x} = \infty.$

Отже, горизонтальних асимптот графік даної функції не має.

2) Оскільки $\lim\limits_{x\to 0}\left(x + \dfrac{1}{x}\right) = \infty$, то $x = 0$ — вертикальна асимптота.

3) $k = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right) = \lim\limits_{x\to\infty} 1 + \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2} = 1 + 0 = 1.$

$b = \lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - kx) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(x + \dfrac{1}{x} - x\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x} = 0.$

Отже, $y = x$ — похила асимптота графіка функції $y = x + \dfrac{1}{x}$ (рис. 118).

Відповідь. $x = 0$ — вертикальна асимптота, $y = x$ — похила асимптота.

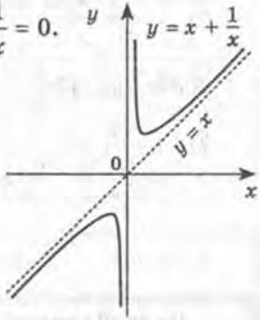


Рис. 118

Перевір себе

Вправи для самостійного розв'язування

1. Обчислити границі:

1) $\lim\limits_{x\to 1}(2x^2 - 3x)$; 2) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{6x-4}{x+3}$;

3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{7-x}{x+2}$; 4) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-3x+1}{x^2-1}$;

5) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x^2-16}{x^2+2x-8}$; 6) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2+2x+1}{x-3}$;

7) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-x-2}{x+1}$; 8) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4x^2-x-3}{x^2-1}$;

9) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-3x+4}{x^2+2x-2}$; 10) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-2x^2+x+5}{2x^3-6x}$;

11) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2-\sqrt{x}}{4-x}$; 12) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5-x}-2}{\sqrt{2-x}-1}$;

13) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 8x}{x}$; 14) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\frac{x}{2}\cdot\sin 4x}{2x^2}$;

15) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{\sin 12x}$.

2. Знайти асимптоти графіків функцій, якщо вони існують:

1) $y=\dfrac{12}{x}$; 2) $y=5+\dfrac{1}{x+2}$;

3) $y=\dfrac{x^2-4}{x-2}$; 4) $y=\dfrac{x+1}{x-1}$;

5) $y=\dfrac{x^2}{x-4}$; 6) $y=\dfrac{2}{x^2+3}$;

7) $y=\dfrac{2}{x^2}$.

§ 2. Похідна

Це треба знати!

1. Приріст функції та приріст аргументу

Зафіксуємо точку x_0 з області визначення функції $y = f(x)$. Нехай x — довільна точка з деякого околу точки x_0.

Тоді $\Delta x = x - x_0$ — ***приріст аргументу***.

Звідси $x = x_0 + \Delta x$.

$\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0)$ — ***приріст функції*** в точці x_0, або

$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

2. Похідна. Похідні деяких елементарних функцій. Правила обчислення похідних

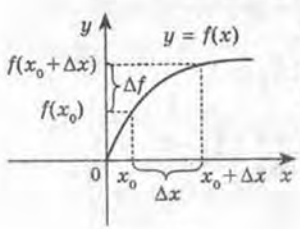


Рис. 119

Похідною функції $y = f(x)$ у точці x_0 називається границя відношення приросту функції в точці x_0 до приросту аргументу, коли останній прямує до нуля (рис. 119):

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

Таблиця похідних

$f(x)$	C, C — стала	x	x^r	$\sqrt{x}$	$\sin x$	$\cos x$
$f'(x)$	0	1	$r\cdot x^{r-1}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\cos x$	$-\sin x$

$f(x)$	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{ctg} x$	e^x	a^x	$\dfrac{1}{x}$
$f'(x)$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$-\dfrac{1}{\sin^2 x}$	e^x	$a^x\cdot\ln a$	$-\dfrac{1}{x^2}$

$f(x)$	$\ln x$	$\log_a x$	$\arcsin x$	$\arccos x$	$\operatorname{arctg} x$	$\operatorname{arcctg} x$
$f'(x)$	$\dfrac{1}{x}$	$\dfrac{1}{x\ln a}$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\dfrac{1}{1+x^2}$	$-\dfrac{1}{1+x^2}$

Правила обчислення похідних

Якщо функції $u(x)$ і $v(x)$ диференційовані в точці x, то:

1) $(u+v)' = u' + v'$;

2) $(Cu)' = Cu'$;

3) $(u\cdot v)' = u'v + uv'$;

4) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'\cdot v - u\cdot v'}{v^2}$, $v(x)\neq 0$.

3. Похідна складеної функції

Нехай $y = f(g(x))$ — складена функція: $u = g(x)$ — внутрішня функція, $f(u)$ — зовнішня функція. Тоді $y' = f'(g(x))\cdot g'(x)$.

4. Фізичний та геометричний зміст похідної

Фізичний зміст похідної: якщо $s = s(t)$ — закон прямолінійного руху, то $s'(t)$ є швидкість руху в момент часу t, тобто $v = s'(t)$ (миттєва швидкість).

$v'(t) = a(t)$ — прискорення.

Геометричний зміст похідної: значення похідної функції $y = f(x)$ у точці x_0 дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної до графіка функції $y = f(x)$ у точці x_0:

$$k = f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha,$$

де α — кут, який утворює дотична з додатним напрямом осі абсцис (рис. 120).

$y = f'(x)\cdot(x - x_0) + f(x_0)$ — рівняння дотичної до графіка функції $y = f(x)$ у точці x_0.

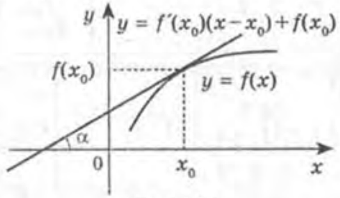


Рис. 120

Самовчитель

Приклад 1. Обчислити похідні функцій:

1) $y = 2x^3 - x + 5$; 2) $y = x^2 \cdot \cos x$;

3) $y = \dfrac{5}{x^2}$; 4) $y = \dfrac{10}{\sqrt[5]{x^3}}$;

5) $y = \dfrac{x^2+1}{x+1}$; 6) $y = \sqrt{\sin 2x}$;

7) $y = (x^2 + 3x)^{20}$; 8) $y = \cos^3 \dfrac{1}{x}$;

9) $y = 2^{\sqrt{\operatorname{tg} x}}$; 10) $y = \ln(\operatorname{ctg} 6x)$;

11) $y = \dfrac{15}{(6x-4)^{10}}$; 12) $y = x^x$.

Розв'язання.

1) $y' = (2x^3)' - x' + 5' = 2(x^3)' - 1 + 0 = 2\cdot 3x^2 - 1 = 6x^2 - 1.$

Відповідь. $6x^2 - 1$.

2) $y' = (x^2)'\cos x + x^2\cdot\cos' x = 2x\cos x - x^2\cdot\sin x =$
$= x(2\cos x - x\sin x).$

Відповідь. $x(2\cos x - x\sin x)$.

3) $y' = (5\cdot x^{-2})' = 5(x^{-2})' = 5(-2)x^{-3} = -\dfrac{10}{x^3}.$

Відповідь. $-\dfrac{10}{x^3}$.

4) $y' = \left(\dfrac{10}{x^{\frac{3}{5}}}\right)' = \left(10x^{-\frac{3}{5}}\right)' = 10\left(-\dfrac{3}{5}\right)x^{-\frac{3}{5}-1} =$

$= -6x^{-\frac{8}{5}} = -\dfrac{6}{x^{\frac{8}{5}}} = -\dfrac{6}{\sqrt[5]{x^8}}.$

Відповідь. $-\dfrac{6}{\sqrt[5]{x^8}}$.

5) $y' = \dfrac{(x^2+1)'(x+1) - (x+1)'(x^2+1)}{(x+1)^2} = \dfrac{2x(x+1) - (x^2+1)}{(x+1)^2} =$

$= \dfrac{2x^2 + 2x - x^2 - 1}{(x+1)^2} = \dfrac{x^2 + 2x - 1}{(x+1)^2}.$

Відповідь. $\dfrac{x^2+2x-1}{(x+1)^2}$.

6) $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{\sin 2x}}\sin' 2x = \dfrac{\cos 2x}{2\sqrt{\sin 2x}}(2x)' =$

$= \dfrac{2\cos 2x}{2\sqrt{\sin 2x}} = \dfrac{\cos 2x}{\sqrt{\sin 2x}}.$

Відповідь. $\dfrac{\cos 2x}{\sqrt{\sin 2x}}$.

7) $y' = 20(x^2+3x)^{19}(x^2+3x)' = 20(2x+3)(x^2+3x)^{19}.$

Відповідь. $20(2x+3)(x^2+3x)^{19}$.

8) $y' = 3\cos^2\dfrac{1}{x}\cdot\cos'\dfrac{1}{x} = 3\cos^2\dfrac{1}{x}\left(-\sin\dfrac{1}{x}\right)\left(\dfrac{1}{x}\right)' =$

$= -3\cos^2\dfrac{1}{x}\cdot\sin\dfrac{1}{x}\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = \dfrac{3}{x^2}\cdot\cos^2\dfrac{1}{x}\cdot\sin\dfrac{1}{x}.$

Відповідь. $\dfrac{3}{x^2}\cdot\cos^2\dfrac{1}{x}\cdot\sin\dfrac{1}{x}$.

9) $y' = 2^{\sqrt{\operatorname{tg} x}}\cdot\ln 2\left(\sqrt{\operatorname{tg} x}\right)' = 2^{\sqrt{\operatorname{tg} x}}\cdot\ln 2\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{\operatorname{tg} x}}\cdot\operatorname{tg}' x =$

$= \dfrac{2^{\sqrt{\operatorname{tg} x}}\cdot\ln 2}{2\sqrt{\operatorname{tg} x}\cdot\cos^2 x}.$

Відповідь. $\dfrac{2^{\sqrt{\operatorname{tg} x}}\cdot\ln 2}{2\sqrt{\operatorname{tg} x}\cdot\cos^2 x}$.

10) $y' = \frac{1}{\text{ctg}\,6x}\,\text{ctg}'\,6x = \frac{1}{\text{ctg}\,6x}\left(-\frac{1}{\sin^2 6x}\right)(6x)' =$

$= -\frac{6}{\text{ctg}\,6x \cdot \sin^2 6x}$.

Відповідь. $-\frac{6}{\text{ctg}\,6x \cdot \sin^2 6x}$.

11) $y' = \left(15 \cdot (6x-4)^{-10}\right)' = 15(-10)(6x-4)^{-11}(6x-4)' =$

$= -150 \cdot 6(6x-4)^{-11} = -\frac{900}{(6x-4)^{11}}$.

Відповідь. $-\frac{900}{(6x-4)^{11}}$.

12) $y' = \left(e^{\ln x^x}\right)' = \left(e^{x\ln x}\right)' = e^{x\ln x} \cdot (x\ln x)' =$

$= e^{x\ln x} \cdot (x'\ln x + x \cdot \ln' x) = x^x \cdot (\ln x + 1)$.

Відповідь. $x^x \cdot (\ln x + 1)$.

Приклад 2. Точка рухається за законом $s(t) = \frac{1}{4}t^4 + \frac{1}{3}t^3 - 7t + 2$ (м).

Знайти швидкість та прискорення точки через 2 с після початку руху.

Розв'язання.

$v(t) = s'(t) = \frac{1}{4} \cdot 4t^3 + \frac{1}{3}3t^2 - 7 = t^3 + t^2 - 7;$

$v(2) = 2^3 + 2^2 - 7 = 8 + 4 - 7 = 5\left(\frac{\text{м}}{\text{с}}\right);$

$a(t) = v'(t) = 3t^2 + 2t;$

$a(2) = 3 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 = 12 + 4 = 16\left(\frac{\text{м}}{\text{с}^2}\right).$

Відповідь. 5 м/с; 16 м/с^2.

Приклад 3. Написати рівняння дотичної до графіка функції $y = x\sqrt{x-1}$ у точці з абсцисою $x_0 = 2$.

Розв'язання.

$y'(x) = x'\sqrt{x-1} + x\left(\sqrt{x-1}\right)' = \sqrt{x-1} + \frac{x}{2\sqrt{x-1}} =$

$= \frac{2(x-1)+x}{2\sqrt{x-1}} = \frac{3x-2}{2\sqrt{x-1}};$

$y'(2) = \frac{3 \cdot 2 - 2}{2\sqrt{2-1}} = \frac{4}{2} = 2;$

$y(2) = 2\sqrt{2-1} = 2.$

Отже, $y = 2(x-2) + 2 = 2x - 4 + 2 = 2x - 2.$

Відповідь. $y = 2x - 2$.

Приклад 4. У якій точці графіка функції $f(x) = 2x^2 - 7x$ дотична нахилена до осі абсцис під кутом 45°?

Розв'язання.

$k = \text{tg}\,\alpha = f'(x_0) = 4x_0 - 7.$

Отже,

$4x_0 - 7 = \text{tg}\,45°;$

$4x_0 - 7 = 1;$

$4x_0 = 8;$

$x_0 = 2.$

$y = f(2) = 2 \cdot 2^2 - 7 \cdot 2 = 8 - 14 = -6.$

Відповідь. (2; −6).

Приклад 5. Визначити параметри b і c у рівнянні параболи $y = x^2 + bx + c$, що дотикається до прямої $y = 5x - 2$ в точці з абсцисою $x_0 = 1$.

Розв'язання.

$f'(x) = 2x + b;$

$f'(1) = 2 + b$ — кутовий коефіцієнт дотичної до параболи в точці з абсцисою $x_0 = 1$.

Отже, $2 + b = 5$; $b = 3$.

$y = 5x - 2;$

$y(1) = 5 \cdot 1 - 2 = 3$ — ордината точки дотику.

Точка (1; 3) належить параболі, тому $3 = 1^2 + 3 \cdot 1 + c$;

$c = 3 - 4 = -1.$

Відповідь. $b = 3$; $c = -1$.

Приклад 6. Пряма $y = 2x - 3$ паралельна дотичній до графіка функції $f(x) = (x-2)(x+1) + 3$. Знайти координати точки дотику.

Розв'язання.

Оскільки пряма $y = 2x - 3$ паралельна дотичній, то кутовий коефіцієнт дотичної $k = 2 = f'(x_0)$;

$f'(x) = (x-2)'(x+1) + (x+1)'(x-2) = x + 1 + x - 2 = 2x - 1;$

$2x_0 - 1 = 2;$

$2x_0 = 3;$

$x_0 = 1{,}5.$

$y_0 = f(1{,}5) = (1{,}5 - 2)(1{,}5 + 1) + 3 =$

$= -0{,}5 \cdot 2{,}5 + 3 = -1{,}25 + 3 = 1{,}75.$

Відповідь. (1,5; 1,75).

Перевір себе

Вправи для самостійного розв'язування

1. Знайти похідну функції:

1) $y = (5x^3 - 2x^2 + x - 2)^{30}$; 2) $y = \dfrac{17}{x^5}$;

3) $y = \dfrac{18}{\sqrt[7]{x^5}}$; 4) $y = 5\sqrt[4]{(2x+1)^3}$;

5) $y = \left(\dfrac{1}{7}x - 3\right)^7$; 6) $y = \left(\dfrac{1}{8}x - 5\right)^8$;

7) $y = \mathrm{tg}^2\, x$; 8) $y = \mathrm{ctg}\, 2x$;

9) $y = \dfrac{2x^2 + 1}{x^2 - 1}$; 10) $y = \dfrac{x^2 + 2}{x^2 - 4}$;

11) $y = \dfrac{1 - x}{x}$; 12) $y = \dfrac{x^2}{1 + x}$;

13) $y = (x-3)^2(x+1)$; 14) $y = x^2\sqrt[5]{x^2}$;

15) $y = x^3 \cdot \cos x + \mathrm{tg}\, 2x$; 16) $y = \sin^2 5x$;

17) $y = 2{,}5^{\cos x}$; 18) $y = 2\log_5 x$;

19) $y = e^{x^3}$; 20) $y = \sqrt{\sin(\ln x)}$;

21) $y = 3\sqrt[3]{x^2} + 2x^3\sqrt{x} + \dfrac{1}{x^3}$; 22) $y = \lg\dfrac{10 - x}{x + 2}$;

23) $y = \ln\sqrt{x^2 - 1}$; 24) $y = x^2\cos\dfrac{1}{x}$;

25) $y = \sin^2\dfrac{x}{2}$; 26) $y = \sin 2x \cdot \mathrm{tg}\, x$;

27) $y = \dfrac{\sin 2x}{\sqrt{x}}$; 28) $y = \arcsin x - \ln x^3$;

29) $y = x^{\sin x}$; 30) $y = (2x^2 + 3x)^x$.

2. Знайти кут між віссю абсцис та дотичною до кривої $y = \dfrac{1}{1-x}$ у точці з абсцисою $x_0 = 2$.

3. Написати рівняння дотичної до графіка функції в даній точці:

1) $y = \ln(2x + 4)$, $x_0 = -\dfrac{1}{2}$;

2) $y = x^2 \cdot e^{-x}$, $x_0 = 1$;

3) $y = x^2 \cdot \ln x$, $x_0 = e$;

4) $y = x(\ln x - 1)$, $x_0 = e$;

5) $y = \dfrac{x + 1}{x^2 + 1}$, $x_0 = 1$.

4. У якій точці графіка функції $y = \ln(x - 1)$ дотична до нього утворює з віссю абсцис кут 45°?

5. Точка рухається за законом $s(t) = \dfrac{1}{5}t^5 + \dfrac{1}{3}t^3 + 20t - 3$. Знайти швидкість та прискорення точки через 2 с після початку руху (s вимірюється в метрах).

6. Тіло масою 2 кг рухається за законом $x(t) = t^3 - 3t^2 + 2$, де $x(t)$ вимірюється в метрах, t — у секундах. Знайти силу, що діє на тіло в момент часу $t = 3$ с.

7. Знайти рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = e^{3x-2}$, яка паралельна прямій $y = 3x - 25$.

§ 3. Застосування похідної

Це треба знати!

1. Дослідження функції на монотонність

Якщо в кожній точці інтервала $(a; b)$ $f'(x) > 0$, то функція $f(x)$ зростає на цьому інтервалі.

Якщо в кожній точці інтервала $(a; b)$ $f'(x) < 0$, то функція $f(x)$ спадає на цьому інтервалі.

2. Дослідження функції на екстремум

Функція $y = f(x)$ має ***максимум*** у точці x_0, якщо в цій точці існує окіл, у якому $f(x) < f(x_0)$.

Функція $y = f(x)$ має ***мінімум*** у точці x_0, якщо в цій точці існує окіл, у якому $f(x) > f(x_0)$.

Точки максимуму і мінімуму називаються ***точками екстремуму***.

Критичними точками функції називаються внутрішні точки її області визначення, у яких похідна дорівнює нулю або не існує.

Необхідна умова екстремуму: якщо x_0 — точка екстремуму функції $f(x)$, то $f'(x_0) = 0$ або $f'(x_0)$ не існує.

Достатня умова екстремуму: якщо в точці x_0 $f'(x)$ змінює знак з «+» на «–», то x_0 — точка максимуму; якщо в точці x_0 $f'(x)$ змінює знак з «–» на «+», то x_0 — точка мінімуму.

3. Схема дослідження функції $y = f(x)$ на монотонність і екстремум

1. Знайти область визначення функції.
2. Знайти похідну $f'(x)$.
3. Знайти критичні точки.
4. Відмітити критичні точки, визначити знак похідної і дослідити характер поведінки функції на кожному з інтервалів, на які розбито область визначення.
5. Визначити відносно кожної критичної точки, чи є вона точкою максимуму, мінімуму або не є точкою екстремуму взагалі.

4. Загальна схема дослідження функції для побудови її графіка

1. Знайти область визначення функції.
2. Дослідити на парність (непарність), періодичність.
3. Знайти точки перетину з осями координат.

4. Знайти асимптоти графіка функції, якщо вони існують.
5. Знайти похідну й критичні точки.
6. Знайти проміжки монотонності й точки екстремуму.
7. Якщо необхідно, знайти координати додаткових точок, щоб уточнити поведінку графіка функції.
8. На основі проведеного дослідження побудувати графік функції.

5. Найбільше та найменше значення функції

Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку і має на ньому скінченне число критичних точок, то вона набуває найбільшого і найменшого значень на цьому відрізку або в критичних точках, які належать цьому відрізку або на кінцях відрізка.

Приклад 1. Знайти проміжки зростання (спадання) та екстремуми функції:

Самовчитель

а) $y = \dfrac{2x+1}{\sqrt{x-1}}$; б) $y = \dfrac{x^2+5x}{x-4}$.

Розв'язання.

а) 1) Знайдемо область визначення функції: $x - 1 > 0$; $x > 1$. Отже, $D(y) = (1; +\infty)$.

2) $$y' = \frac{(2x+1)'\sqrt{x-1} - \left(\sqrt{x-1}\right)'(2x+1)}{\left(\sqrt{x-1}\right)^2} = \frac{2\sqrt{x-1} - \dfrac{2x+1}{2\sqrt{x-1}}}{x-1} =$$

$$= \frac{4(x-1)-(2x+1)}{2(x-1)\sqrt{x-1}} = \frac{4x-4-2x-1}{2(x-1)\sqrt{x-1}} = \frac{2x-5}{2(x-1)\sqrt{x-1}}.$$

3) Знайдемо критичні точки:

$$\frac{2x-5}{2(x-1)\sqrt{x-1}} = 0;$$

$$\begin{cases} 2x-5=0, \\ x \neq 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2{,}5, \\ x \neq 1. \end{cases}$$

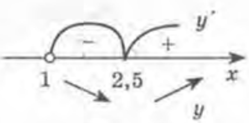


Рис. 121

$x = 2{,}5$ — критична точка

$x = 1$ — не є критичною точкою, оскільки 1 не є внутрішньою точкою області визначення.

4) Нанесемо область визначення та критичні точки на числову пряму (рис. 121) та визначаємо знак похідної на кожному з утворених проміжків:

$$y'(2) = \frac{2\cdot 2-5}{2(2-1)\sqrt{2-1}} < 0; \quad y'(3) = \frac{2\cdot 3-5}{2(3-1)\sqrt{3-1}} > 0.$$

Отже, функція спадає, якщо $x \in (1;\ 2{,}5)$; функція зростає, якщо $x \in (2{,}5;\ +\infty)$; $x_{\min} = 2{,}5$;

$$y_{\min} = \frac{2 \cdot 2{,}5 + 1}{\sqrt{2{,}5 - 1}} = \frac{6}{\sqrt{1{,}5}} = \frac{60}{10\sqrt{1{,}5}} = \frac{60}{\sqrt{150}} = \frac{60}{\sqrt{25 \cdot 6}} =$$

$$= \frac{60}{5\sqrt{6}} = \frac{12}{\sqrt{6}} = \frac{12\sqrt{6}}{6} = 2\sqrt{6}.$$

Відповідь. На проміжку (1; 2,5) функція спадає; на проміжку $(2{,}5;\ +\infty)$ — зростає; $y_{\min} = 2\sqrt{6}$.

б) 1) $D(y) = (-\infty;\ 4) \cup (4;\ +\infty)$;

2) $$y' = \frac{(x^2 + 5x)'(x - 4) - (x - 4)'(x^2 + 5x)}{(x - 4)^2} =$$

$$= \frac{(2x + 5)(x - 4) - (x^2 + 5x)}{(x - 4)^2} =$$

$$= \frac{2x^2 - 8x + 5x - 20 - x^2 - 5x}{(x - 4)^2} = \frac{x^2 - 8x - 20}{(x - 4)^2};$$

3) $$\frac{x^2 - 8x - 20}{(x - 4)^2} = 0;\quad \begin{cases} x^2 - 8x - 20 = 0, \\ x \neq 4; \end{cases} \quad \left\{ \begin{aligned} &\left[\begin{aligned} &x = 10, \\ &x = -2, \end{aligned} \right. \\ &x \neq 4; \end{aligned} \right.$$

$x = 10$; $x = -2$ — критичні точки.

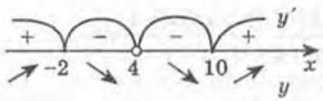


Рис. 122

4) Нанесемо критичні точки на числову пряму (рис. 122) та визначимо знак похідної на кожному з проміжків:

$$y'(-3) = \frac{(-3)^2 - 8 \cdot (-3) - 20}{(-3 - 4)^2} =$$

$$= \frac{9 + 24 - 20}{49} > 0;$$

$$y'(0) = \frac{-20}{16} < 0;$$

$$y'(5) = \frac{5^2 - 8 \cdot 5 - 20}{(5 - 4)^2} = \frac{25 - 40 - 20}{1} < 0;$$

$$y'(12) = \frac{12^2 - 8 \cdot 12 - 20}{(12 - 4)^2} = \frac{144 - 96 - 20}{64} > 0.$$

Отже, функція зростає на кожному із проміжків $(-\infty;\ -2)$, $(10;\ +\infty)$; спадає на кожному із проміжків $(-2;\ 4)$, $(4;\ 10)$;

$x_{\max} = -2$;

$x_{\min} = 10$,

$$y_{\max} = \frac{(-2)^2 + 5(-2)}{-2 - 4} = \frac{4 - 10}{-6} = \frac{-6}{-6} = 1;$$

$$y_{\min} = \frac{10^2 + 5 \cdot 10}{10 - 4} = \frac{150}{6} = 25.$$

Відповідь. На проміжках $(-\infty;\ -2)$; $(10;\ +\infty)$ зростає; на проміжках $(-2;\ 4)$; $(4;\ 10)$ спадає; $y_{\max} = 1$; $y_{\min} = 25$.

Приклад 2. Знайти найбільше та найменше значення функції на даному проміжку:

а) $y = \dfrac{x^2 + 8}{x - 1}$, $[-3;\ 0]$; б) $y = x \ln x$, $\left[e^{-2};\ 1\right]$.

Розв'язання.

а) $D(y) = (-\infty;\ 1) \cup (1;\ +\infty)$;

$$y' = \frac{(x^2 + 8)'(x - 1) - (x - 1)'(x^2 + 8)}{(x - 1)^2} = \frac{2x(x - 1) - (x^2 + 8)}{(x - 1)^2} =$$

$$= \frac{2x^2 - 2x - x^2 - 8}{(x - 1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 8}{(x - 1)^2};$$

$$\frac{x^2 - 2x - 8}{(x - 1)^2} = 0;\quad \begin{cases} x^2 - 2x - 8 = 0, \\ x \neq 1; \end{cases} \quad \left\{ \begin{aligned} &\left[\begin{aligned} &x = -2, \\ &x = 4, \end{aligned} \right. \\ &x \neq 1; \end{aligned} \right.$$

$x = -2$; $x = 4$ — критичні точки.

$x = 4$ не належить $[-3;\ 0]$.

$$y(-2) = \frac{(-2)^2 + 8}{-2 - 1} = \frac{4 + 8}{-3} = \frac{12}{-3} = -4;$$

$$y(-3) = \frac{(-3)^2 + 8}{-3 - 1} = \frac{9 + 8}{-4} = -\frac{17}{4} = -4\frac{1}{4};$$

$$y(0) = \frac{0 + 8}{0 - 1} = -8.$$

Отже, $\max\limits_{[-3;\ 0]} y(x) = y(-2) = -4$; $\min\limits_{[-3;\ 0]} y(x) = y(0) = -8$.

б) $D(y) = (0;\ +\infty)$.

$$y' = x' \ln x + x \ln' x = \ln x + x\frac{1}{x} = 1 + \ln x;$$

$1 + \ln x = 0;$

$\ln x = -1;$

$x = e^{-1}$ — критична точка.

$y\left(e^{-1}\right) = e^{-1} \cdot \ln e^{-1} = -e^{-1} = -\dfrac{1}{e};$

$y\left(e^{-2}\right) = e^{-2} \cdot \ln e^{-2} = -\dfrac{2}{e^2};$

$y(1) = 1 \cdot \ln 1 = 0.$

$\dfrac{1}{e} - \dfrac{2}{e^2} = \dfrac{e-2}{e^2} > 0.$ Отже, $\dfrac{1}{e} > \dfrac{2}{e^2};\quad -\dfrac{1}{e} < -\dfrac{2}{e^2}$

і $\max\limits_{[e^{-2};\,1]} y(x) = y(1) = 0,\quad \min\limits_{[e^{-2};\,1]} y(x) = y\left(e^{-1}\right) = -\dfrac{1}{e}.$

Відповідь. $\max\limits_{[e^{-2};\,1]} y(x) = y(1) = 0,\quad \min\limits_{[e^{-2};\,1]} y(x) = y\left(e^{-1}\right) = -\dfrac{1}{e}.$

Приклад 3. Знайти довжину сторін прямокутника, що при периметрі 48 см має найбільшу площу.

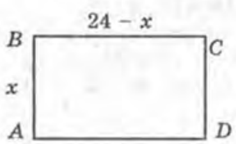


Рис. 123

Розв'язання.

Нехай у чотирикутнику $ABCD$ $AB = x$, тоді $BC = 24 - x$ (рис. 123),

$S(x) = x(24 - x),\ x \in (0;\ 24).$

Дослідимо функцію $S(x) = x(24 - x)$ на найбільше і найменше значення, якщо $x \in (0;\ 24)$.

$S'(x) = x'(24 - x) + x(24 - x)' = 24 - x - x = 24 - 2x.$

Знайдемо критичні точки

$24 - 2x = 0;$

$-2x = -24;\ x = 12.$

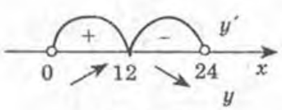


Рис. 124

Нанесемо на числову пряму область визначення і критичну точку (рис. 124) та визначимо знак похідної на утворених проміжках:

$S'(10) = 24 - 20 > 0;$

$S'(15) = 24 - 30 < 0.$

Отже, $x_{max} = 12$, тоді $S_{max} = 12(24 - 12) = 12 \cdot 12 = 144$ (см²).

Отже, найбільшу площу матиме квадрат зі стороною 12 см.

Відповідь. 12 см; 12 см.

Приклад 4. Побудувати графік функції:

а) $y = 3x - x^3$; б) $y = \dfrac{x^2}{x+1}$.

Розв'язання.

а) 1) $D(y) = (-\infty;\ +\infty)$.

2) Знайдемо точки перетину з осями координат:

$3x - x^3 = 0;\ \ x\left(3 - x^2\right) = 0;$

$\left[\begin{array}{l} x = 0, \\ 3 - x^2 = 0; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = -\sqrt{3}, \\ x = \sqrt{3}. \end{array}\right.$

$x = -\sqrt{3};\ x = 0;\ x = \sqrt{3}$ — нулі функції;

$y(0) = 3 \cdot 0 - 0^3 = 0.$

3) $y' = 3 - 3x^2;$

$3 - 3x^2 = 0;\ 3x^2 = 3;\ x^2 = 1;$

$\left[\begin{array}{l} x = -1; \\ x = 1. \end{array}\right.$

$x = 1$ і $x = 1$ — критичні точки.

Нанесемо критичні точки на числову пряму (рис. 125) та визначимо знак похідної на кожному з утворених проміжків:

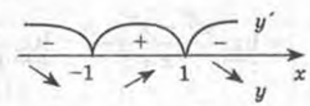


Рис. 125

$y'(-2) = 3 - 3 \cdot (-2)^2 = 3 - 12 < 0$

$y'(0) = 3 > 0$

$y'(2) = 3 - 3 \cdot 2^2 = 3 - 12 < 0.$

Отже, функція спадає на кожному із проміжків $(-\infty;\ -1)$; $(1;\ +\infty)$; зростає на проміжку $(-1;\ 1)$; $x_{min} = -1$, $x_{max} = 1$,

$y_{min} = 3 \cdot (-1) - (-1)^3 = -3 - (-1) = -3 + 1 = -2;$

$y_{max} = 3 \cdot 1 - 1^3 = 3 - 1 = 2.$

4) Побудуємо графік функції (рис. 126).

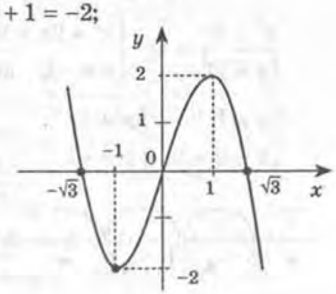


Рис. 126

б) 1) $D(y) = (-\infty;\ -1) \cup (-1;\ +\infty);$

2) $\dfrac{x^2}{x+1} = 0;$

$\left\{\begin{array}{l} x = 0, \\ x \neq -1; \end{array}\right.$

$x = 0$ — нуль функції;

$y(0) = 0$.

3) Знайдемо асимптоти графіка функції:

$x = -1$ — вертикальна асимптота, оскільки

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2}{x+1}=\infty;$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{1+\frac{1}{x}}=\infty.$$

Отже, горизонтальних асимптот немає.

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}1}{\lim\limits_{x\to\infty}1+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}}=\frac{1}{1+0}=1;$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x+1}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x(x+1)}{x+1}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x^2}-\cancel{x^2}-x}{x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{-x}{x+1}=-\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}=-\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x}}=-1.$$

Отже, $y = x - 1$ — похила асимптота.

4) $$y'=\frac{(x^2)'(x+1)-(x+1)'x^2}{(x+1)^2}=\frac{2x(x+1)-x^2}{(x+1)^2}=$$

$$=\frac{2x^2+2x-x^2}{(x+1)^2}=\frac{x^2+2x}{(x+1)^2};$$

$$\frac{x^2+2x}{(x+1)^2}=0;\quad \begin{cases}x^2+2x=0,\\ x\neq -1;\end{cases}\quad x(x+2)=0;$$

$$\left[\begin{array}{l}x=0,\\ x+2=0;\end{array}\right.\quad \left[\begin{array}{l}x=0,\\ x=-2.\end{array}\right.$$

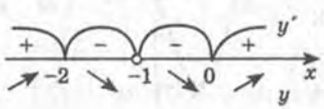


Рис. 127

$x = -2$; $x = 0$ — критичні точки. Нанесемо критичні точки на числову пряму (рис. 127) та визначимо знак похідної на кожному з утворених проміжків.

Отже, функція зростає на кожному з проміжків $(-\infty; -2)$, $(0; +\infty)$; спадає на кожному з проміжків $(-2; -1)$, $(-1; 0)$;

$x_{\max} = -2$; $x_{\min} = 0$;

$$y_{\max}=\frac{(-2)^2}{-2+1}=-4;$$

$y_{\min} = 0$.

5) Побудуємо графік функції (рис. 128).

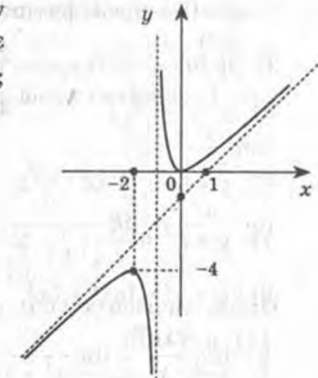


Рис. 128

Вправи для самостійного розв'язування

Перевір себе!

1. Знайти проміжки зростання та спадання функції:

1) $y = x^4 - 2x^2$; 2) $y = x + \frac{1}{x}$;

3) $y = x^3 - 24x + 2$; 4) $y = \frac{2}{x} + x^2$;

5) $y = 2\sin 2x$; 6) $y = \frac{x^2+1}{x}$;

7) $y = \left(x^2 - 2x - 3\right)^2$; 8) $y = \frac{x^2}{1+x}$;

9) $y = x - \ln x$; 10) $y = e^x - x$;

11) $y = \frac{3x-2}{x+3}$; 12) $y = \frac{x^2+4}{x^2-4}$.

2. Знайти точки екстремуму функції:

1) $y = \frac{x^2+7x}{x-9}$; 2) $y = \frac{x^2+6x}{x-2}$;

3) $y = (2x-1)e^{3x}$; 4) $y = \frac{x^2-5x}{x+4}$;

5) $y = 2x^4 - 2x^3 - x^2 + 2$.

3. Знайти екстремуми функції:

1) $y = x^3 - 27x$; 2) $y = \frac{4x-5}{x+2}$;

3) $y = \frac{x+1}{x^2+3}$; 4) $y = x^4 - 4x^2$;

5) $y = (x+1)^2(x+5)^2$; 6) $y = \frac{x^2-x+4}{x-1}$;

7) $y = x^2 + \frac{16}{x}$; 8) $y = (x-3)^4$;

9) $y = x^2 - \ln(1+2x)$; 10) $y = \sqrt{1-x^2}$;

11) $y = xe^{-x}$; 12) $y = x - 3\ln x$.

4. Знайти найбільше і найменше значення функції на вказаному проміжку:

1) $y = \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 5x - 7$, $[-1; 3]$;

2) $y = \frac{x^4}{4} - 2x^2$, $[-1; 4]$;

3) $y = \frac{x}{8} + \frac{2}{x}$, $[1; 6]$;

4) $y = x + e^{-x}$, $[-1; 2]$;

5) $y = 2\sqrt{x} - x$, $[0; 9]$;

6) $y = 3x^2 - 2x^3$, $[-1; 2]$;

7) $y = 5\sin x + \cos 2x$, $[0; \pi]$;

8) $y = \sqrt{2x - x^2}$, $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$;

9) $y = x^2 \cdot \ln x$, $\left[e^{-2}; 1\right]$;

10) $y = \frac{\ln x}{x}$, $\left[1; e^2\right]$.

5. Знайти довжину сторін прямокутника, що має площу 144 см² та найменший периметр.

6. Розкласти число 6 на два невід'ємних доданки так, щоб добуток їх квадратів був найбільшим.

7. Різниця двох чисел дорівнює 7. Якими мають бути ці числа, щоб добуток їх був найменшим?

8. Дослідити функцію та побудувати її графік:

1) $y = 2x^2 - x^4$; 2) $y = x^4 - 2x^2 + 1$;

3) $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2$; 4) $y = x^2 - \frac{1}{4}x^4$;

5) $y = \frac{2x-3}{2+x} - 1$; 6) $y = 3x^5 - 5x^3$;

7) $y = \frac{2x}{1+x^2}$; 8) $y = x^4 - 4x^3$;

9) $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4$; 10) $y = \frac{x^2}{x-1}$;

11) $y = \frac{x}{x^2-1}$; 12) $y = \frac{\ln x}{x}$; 13) $y = x^2 + \frac{2}{x}$.

§ 4. Первісна

Це треба знати!

Функція $F(x)$ називається ***первісною*** для функції $f(x)$ на проміжку X, якщо для будь-якого $x \in X$ виконується рівність $F'(x) = f(x)$.

Таблиця первісних

$f(x)$	k, k — стала	x^r $(r \neq -1)$	$\frac{1}{x}$	e^x	a^x
$F(x)$	$kx + C$	$\frac{x^{r+1}}{r+1} + C$	$\ln\|x\| + C$	$e^x + C$	$\frac{a^x}{\ln a} + C$

$f(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$\sin x$	$\cos x$	$\frac{1}{\sin^2 x}$
$F(x)$	$2\sqrt{x} + C$	$-\cos x + C$	$\sin x + C$	$-\mathrm{ctg}\, x + C$

$f(x)$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{1+x^2}$
$F(x)$	$\mathrm{tg}\, x + C$	$\arcsin x + C$	$\mathrm{arctg}\, x + C$

Правила обчислення первісних (невизначених інтегралів)

1. Якщо $F(x)$ — первісна функції $f(x)$, $H(x)$ — первісна для функції $h(x)$, тоді $F(x) \pm H(x)$ — первісна $f(x) + h(x)$, тобто первісна суми дорівнює сумі первісних.
2. Якщо $F(x)$ — первісна функції $f(x)$, k — стала, то $kF(x)$ — первісна для функції $kf(x)$, тобто постійний множник можна виносити за знак первісної.
3. Якщо $F(x)$ — первісна функції $f(x)$ і k, b — сталі, причому $k \neq 0$, тоді $\frac{1}{k}F(kx+b)$ — первісна функції $f(kx+b)$.

Самовчитель

Приклад 1. Знайти загальний вигляд первісних для функції

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt[5]{x^3}} + \sin\frac{x}{2} - 3^x + (6-4x)^{10} - \frac{15}{3x-2}.$$

Розв'язання.

Перепишемо функцію у вигляді:

$$f(x) = 2\cdot x^{-\frac{3}{5}} + \sin\frac{x}{2} - 3^x + (6-4x)^{10} - \frac{15}{3x-2}, \text{ тоді}$$

$$F(x) = \frac{2\cdot x^{-\frac{3}{5}+1}}{-\frac{3}{5}+1} - \frac{1}{\frac{1}{2}}\cos\frac{x}{2} - \frac{3^x}{\ln 3} - \frac{1}{4}\cdot\frac{(6-4x)^{11}}{11} - \frac{15}{3}\ln|3x-2| + C =$$

$$= \frac{2\cdot x^{\frac{2}{5}}}{\frac{2}{5}} - 2\cos\frac{x}{2} - \frac{3^x}{\ln 3} - \frac{(6-4x)^{11}}{44} - 5\ln|3x-2| + C =$$

$$= 5\sqrt[5]{x^2} - 2\cos\frac{x}{2} - \frac{3^x}{\ln 3} - \frac{(6-4x)^{11}}{44} - 5\ln|3x-2| + C.$$

Відповідь. $5\sqrt[5]{x^2} - 2\cos\frac{x}{2} - \frac{3^x}{\ln 3} - \frac{(6-4x)^{11}}{44} - 5\ln|3x-2| + C.$

Приклад 2. Для функції $y = \frac{3}{2\sqrt{x}} - 2x$ знайти первісну, графік якої проходить через точку $A(1; -2)$.

Розв'язання.

$$F(x) = \frac{3}{2}\cdot 2\sqrt{x} - 2\frac{x^2}{2} + C = 3\sqrt{x} - x^2 + C.$$

Знайдемо C, враховуючи, що графік первісної проходить через точку $A(1; -2)$:

$3\sqrt{1} - 1^2 + C = -2;$ $3 - 1 + C = -2;$ $2 + C = -2;$ $C = -2 - 2;$ $C = -4.$

Отже, шукана первісна $F(x) = 3\sqrt{x} - x^2 - 4.$

Відповідь. $F(x) = 3\sqrt{x} - x^2 - 4.$

Вправи для самостійного розв'язування

Перевір себе

1. Знайти загальний вигляд первісних для функції:

1) $f(x) = \frac{4}{2x-3} + 2^{3x-4} + 7;$

2) $f(x) = \frac{3}{\sin^2 3x} + \cos\frac{x}{4} - e^{6-4x} + 8x - 1;$

3) $f(x) = \frac{3}{\sqrt{6-2x}} + \sqrt[3]{x^2} - \frac{8}{x^8} - 4;$

4) $f(x) = \sin(2x-3) - \frac{1}{\cos^2(5-3x)} + e^{8x};$

5) $f(x) = \frac{15}{\sqrt[3]{(6-2x)^2}} - \frac{3}{(x-1)^9} + \frac{3}{6x-1} + 10;$

6) $f(x) = 3^{1-x} - \sqrt[5]{(1-3x)^3} + \frac{10}{1-x} + \sin\frac{x}{8};$

7) $f(x) = 3 - (6x+1)^7 - \cos(3x-8) + \frac{10}{\sqrt{3x+5}} + \frac{1}{2};$

8) $f(x) = 4^{1-x} + \frac{3}{(6-8x)^5} + \frac{4}{\cos^2(2-3x)} + \ln 2.$

2. Для заданої функції знайти первісну, графік якої проходить через дану точку:

1) $y = 3x^2 - 4x + 5,$ $A(2; 6);$

2) $y = 4x^3 - 2x + 3,$ $A(1; 8);$

3) $y = \frac{2}{\sqrt{4x+5}},$ $A(5; 7);$

4) $y = 6x^2 + e^{4x},$ $A\left(\frac{1}{2}; \frac{e^2}{4}\right);$

5) $y = \frac{5}{2\sqrt{x}} + x$, $M(4; -3)$;

6) $y = \frac{12}{\sqrt{4x-3}}$, $A(3; 18)$;

7) $y = 4e^{2x-1}$, $A(1; 3e)$;

8) $y = \frac{6}{\cos^2 6x}$, $A\left(\frac{\pi}{18}; 3\sqrt{3}\right)$.

§ 5. Інтегрування

Це треба знати!

1. Невизначений інтеграл від функції $f(x)$

Якщо на деякому проміжку $F(x)$ — первісна для функції $f(x)$, то вираз $F(x) + C$, де C — постійна, називається ***невизначеним інтегралом*** від функції $f(x)$ і позначається $\int f(x)\,dx$.

Отже, $\int f(x)dx = F(x) + C$.

Основні правила інтегрування

1) $\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx$, де a — постійна величина;

2) $\int (f(x) \pm g(x))\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$;

3) Якщо $\int f(x)\,dx = F(x) + C$, то

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C,$$

де a і b — сталі величини, $a \neq 0$.

Таблиця невизначених інтегралів

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, $n \neq -1$; $\quad \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$;

$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$; $\quad \int e^x dx = e^x + C$;

$\int \sin x dx = -\cos x + C$; $\quad \int \cos x dx = \sin x + C$;

$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$; $\quad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$;

$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$; $\quad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$.

2. Визначений інтеграл

Визначеним інтегралом на проміжку $[a; b]$ від неперервної на цьому проміжку функції $f(x)$ називається приріст $F(b) - F(a)$ будь-якої первісної F цієї функції на проміжку $[a; b]$; позначається

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \text{ (Формула Ньютона–Лейбніца),}$$

де a — нижня границя інтегрування; b — верхня границя інтегрування; $f(x)$ — підінтегральна функція.

Основні правила інтегрування:

1) $\int_a^b (f(x) \pm g(x))\,dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$;

2) $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$;

3) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$, $c \in [a; b]$;

4) $\int_a^b f(kx+p)dx = \left| \begin{array}{l} kx+p=t, \\ kdx = dt, \\ dx = \frac{dt}{k}; \end{array} \right| = \frac{1}{k}\int_{ka+p}^{kb+p} f(t)dt.$

Самовчитель

Приклад 1. Обчислити невизначені інтеграли:

а) $\int \frac{dx}{(7-3x)^8}$; б) $\int \left(\frac{5}{7x-9} - \frac{4}{\cos^2 3x} + 2\right)dx$;

в) $\int \frac{x - 2\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}\,dx$; г) $\int 4\cos\frac{x}{2}\cos x \sin\frac{x}{2}\,dx$;

д) $\int \cos^2 x dx$.

Розв'язання.

а) $\int \frac{dx}{(7-3x)^8} = \int (7-3x)^{-8}\,dx = -\frac{1}{3}\cdot\frac{(7-3x)^{-8+1}}{-8+1} + C =$

$= -\frac{1}{3}\cdot\frac{(7-3x)^{-7}}{-7} + C = \frac{1}{21(7-3x)^7} + C.$

Відповідь. $\frac{1}{21(7-3x)^7} + C.$

б) $\int\left(\frac{5}{7x-9}-\frac{4}{\cos^2 3x}+2\right)dx =$

$= 5\cdot\frac{1}{7}\cdot\ln|7x-9| - 4\cdot\frac{1}{3}\cdot\mathrm{tg}\,3x+2x+C =$

$= \frac{5}{7}\ln|7x-9|-\frac{4}{3}\mathrm{tg}\,3x+2x+C.$

Відповідь. $\frac{5}{7}\ln|7x-9|-\frac{4}{3}\mathrm{tg}\,3x+2x+C.$

в) $\int\frac{x-2\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}dx = \int\left(\frac{x}{\sqrt[3]{x}}-\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}\right)dx = \int\left(x^{1-\frac{1}{3}}-2x^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}\right)dx =$

$=\int\left(x^{\frac{2}{3}}-2x^{\frac{1}{6}}\right)dx = \frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1}-\frac{2x^{\frac{1}{6}+1}}{\frac{1}{6}+1}+C = \frac{3x^{\frac{5}{3}}}{5}-\frac{12x^{\frac{7}{6}}}{7}+C=$

$=\frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5}-\frac{12}{7}\sqrt[6]{x^7}+C=\frac{3}{5}x\sqrt[3]{x^2}-\frac{12}{7}x\sqrt[6]{x}+C.$

Відповідь. $\frac{3}{5}x\sqrt[3]{x^2}-\frac{12}{7}x\sqrt[6]{x}+C.$

г) $\int 4\cos\frac{x}{2}\cos x\sin\frac{x}{2}\, dx = \int 2\sin x\cos x\, dx = \int\sin 2x\, dx =$

$= -\frac{1}{2}\cos 2x + C.$

Відповідь. $-\frac{1}{2}\cos 2x + C.$

д) $\int\cos^2 x\, dx = \int\frac{1+\cos 2x}{2}dx = \int\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x\right)dx =$

$=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin 2x+C = \frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x + C.$

Відповідь. $\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x + C.$

Приклад 2. Обчислити визначені інтеграли:

а) $\int_1^4\left(4x^3-3x\sqrt{x}\right)dx$; б) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\sin x\, dx$;

в) $\int_1^2\frac{e^x-x^3}{x^3e^x}dx$; г) $\int_1^4\left(2\sqrt{x} - x\right)^2dx$;

д) $\int_1^4\left(\frac{3}{x}+x\right)dx.$

Розв'язання.

а) $\int_1^4\left(4x^3-3x\sqrt{x}\right)dx = \int_1^4\left(4x^3-3x^{\frac{3}{2}}\right)dx = \left(4\cdot\frac{x^4}{4}-3\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\right)\Bigg|_1^4 =$

$=\left(x^4-\frac{6}{5}\sqrt{x^5}\right)\Bigg|_1^4 = 4^4-\frac{6}{5}\left(\sqrt{4}\right)^5-\left(1^4-\frac{6}{5}\sqrt{1^5}\right)=$

$=256-\frac{6}{5}\cdot 32-1+\frac{6}{5}=255-31\cdot\frac{6}{5}=255-37\frac{1}{5}=$

$=254\frac{5}{5}-37\frac{1}{5}=217\frac{4}{5}=217,8.$

Відповідь. 217,8.

б) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\sin x\, dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\cos x\sin x\, dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x\, dx =$

$=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cos 2x\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{4}\cos 2x\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{4}\cos\pi-\left(-\frac{1}{4}\cos 0\right)=$

$=-\frac{1}{4}(-1)+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}.$

Відповідь. $\frac{1}{2}$.

в) $\int_1^2\frac{e^x-x^3}{x^3e^x}dx=\int_1^2\left(\frac{e^x}{x^3e^x}-\frac{x^3}{x^3e^x}\right)dx=\int_1^2\left(x^{-3}-e^{-x}\right)dx=$

$=\left(\frac{x^{-2}}{-2}+e^{-x}\right)\Bigg|_1^2 = \left(-\frac{1}{2x^2}+e^{-x}\right)\Bigg|_1^2 = -\frac{1}{2\cdot 2^2}+e^{-2}-\left(-\frac{1}{2\cdot 1^2}+e^{-1}\right)=$

$=-\frac{1}{8}+e^{-2}+\frac{1}{2}-e^{-1}=\frac{3}{8}+\frac{1}{e^2}-\frac{1}{e}=\frac{3e^2-8e+8}{8e^2}.$

Відповідь. $\frac{3e^2-8e+8}{8e^2}.$

г) $\int\limits_1^4 \left(2\sqrt{x}-x\right)^2 dx = \int\limits_1^4 \left(4x - 4x\sqrt{x} + x^2\right) dx = \int\limits_1^4 \left(4x - 4x^{\frac{3}{2}} + x^2\right) dx =$

$$= \left(4\cdot\frac{x^2}{2} - 4\cdot\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_1^4 = \left(2x^2 - \frac{8}{5}\left(\sqrt{x}\right)^5 + \frac{1}{3}x^3\right)\Bigg|_1^4 =$$

$$= 2\cdot 4^2 - \frac{8}{5}\left(\sqrt{4}\right)^5 + \frac{1}{3}\cdot 4^3 - \left(2\cdot 1^2 - \frac{8}{5}\cdot\left(\sqrt{1}\right)^5 + \frac{1}{3}\cdot 1^3\right) =$$

$$= 32 - \frac{8}{5}\cdot 32 + \frac{64}{3} - 2 + \frac{8}{5} - \frac{1}{3} = -\frac{3}{5}\cdot 32 + 21 - \frac{2}{5} = -\frac{98}{5} + 21 =$$

$$= \frac{7}{5} = 1\frac{2}{5} = 1,4.$$

Відповідь. 1,4.

д) $\int\limits_1^4 \left(\frac{3}{x} + x\right) dx = \left(3\ln|x| + \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_1^4 = 3\ln 4 + \frac{4^2}{2} - \left(3\ln 1 + \frac{1}{2}\right) =$

$$= 3\ln 4 + 8 - 3\ln 1 - \frac{1}{2} = 3\ln 2^2 + 8 - 0 - \frac{1}{2} = 6\ln 2 + 7,5.$$

Відповідь. $6\ln 2 + 7,5$.

Перевір себе

Вправи для самостійного розв'язування

1. **Обчислити невизначені інтеграли:**

1) $\int \frac{dx}{(2x+3)^5}$; 2) $\int \frac{3dx}{(8-4x)^7}$;

3) $\int \frac{dx}{8-15x}$; 4) $\int \sin^2 x dx$;

5) $\int x^3 \cdot \sqrt[5]{x^2} dx$; 6) $\int \frac{x^2 + 3\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}} dx$; 7) $\int 2^{3x+4} dx$;

8) $\int \left(\frac{2}{\sqrt{3x-4}} - \sin\frac{x}{4} + \frac{5}{9-5x} + \frac{4}{\sin^2 4x}\right) dx$;

9) $\int \left(\sqrt[5]{(2x-3)^3} + e^{6-8x} + 5^{3-x} + \frac{1}{3}\right) dx$;

10) $\int \left(\frac{8}{(5-7x)^6} - \cos(4-7x) - \frac{3}{\cos^2\frac{x}{3}} + \ln 3\right) dx$.

2. Обчислити визначені інтеграли:

1) $\int_{-1}^{2}(x^2-4x+5)dx$; 2) $\int_{-2}^{1}(x^2-2x+4)\,dx$;

3) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(2\cos 2x+\frac{1}{3}\sin\frac{x}{3}\right)dx$; 4) $\int_{1}^{3}\left(\frac{4}{x}-x\right)dx$;

5) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(3\sin 3x-\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}\right)dx$; 6) $\int_{0}^{\frac{\pi}{9}}\frac{dx}{\cos^2 3x}$;

7) $\int_{\pi}^{2\pi}\frac{dx}{\sin^2\frac{x}{4}}$; 8) $\int_{1}^{2}(3x^3-6x-1)\,dx$;

9) $\int_{0}^{\pi}\cos^2 x dx$; 10) $\int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2x dx$;

11) $\int_{8}^{27}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$; 12) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}(\sin 2x-\cos 2x)^2\,dx$;

13) $\int_{0}^{\pi}\cos\left(\frac{2\pi}{3}-3x\right)dx$; 14) $\int_{0}^{\frac{2\pi}{3}}\sin\left(\frac{\pi}{3}-3x\right)dx$;

15) $\int_{9}^{-54}\sqrt[3]{2-\frac{x}{9}}dx$.

§ 6. Застосування інтегралів

1. Фізичні задачі, що розв'язуються за допомогою інтегралів

Це треба знати!

Якщо тіло рухається зі швидкістю, що змінюється за законом $v=f(t)$, то залежність шляху, пройденого тілом, від часу t подається у вигляді

$$s(t)=\int f(t)\,dt=F(t)+C,$$

де $F(t)$ — деяка первісна функції $f(x)$, а константа C знаходиться з додаткових умов.

Задача. Тіло рухається прямолінійно зі швидкістю, що змінюється за законом $v=2t$ м/с. Знайти закон руху тіла, якщо відомо, що за перші дві секунди воно пройшло 15 м.

Розв'язання.

$$s(t)=\int 2t\,dt=2\cdot\frac{t^2}{2}+C=t^2+C.$$

Знайдемо C, враховуючи, що $s(2)=15$:

$s(2)=2^2+C=15;\ C=15-4=11.$

Отже, $s(t)=t^2+11$ (м).

Відповідь. $s(t)=t^2+11$ (м).

2. Площа криволінійної трапеції

Фігура, обмежена графіком неперервної функції $f(x)$, $\left(f(x)>0,\right)$ прямими $x=a$, $x=b$ і віссю абсцис, називається ***криволінійною трапецією*** (рис. 129).

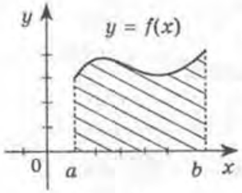


Рис. 129

Площа криволінійної трапеції обчислюється за формулою:

$$S=\int_a^b f(x)dx.$$

Якщо $f(x)<0$, то для знаходження площі (рис. 130) можна скористатися формулою:

$$S=-\int_a^b f(x)dx.$$

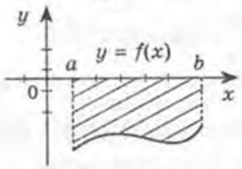


Рис. 130

Якщо фігура обмежена графіками неперервних функцій $f(x)$ і $g(x)$ $\left(f(x)>g(x)\right)$, (рис. 131) та прямими $x=a$, $x=b$, $(b>a)$, то для знаходження її площі можна скористатися формулою:

$$S=\int_a^b\left(f(x)-g(x)\right)dx.$$

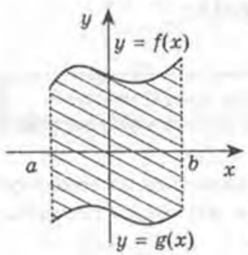


Рис. 131

3. Обчислення об'ємів тіл

Нехай криволінійна трапеція опирається на відрізок $[a;\ b]$ осі абсцис та обмежена зверху графіком функції $y=f(x)$, невід'ємної і неперервної на відрізку $[a;\ b]$.

Унаслідок обертання цієї криволінійної трапеції навколо осі абсцис утворюється тіло, об'єм якого можна знайти за формулою:

$$V=\int_a^b \pi f^2(x)dx=\pi\int_a^b f^2(x)dx.$$

Самовчитель

Приклад 1. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі абсцис фігури, обмеженої лініями $y=1-x^2$ і $y=0$.

Розв'язання.

Переконаємося, що дана фігура є криволінійною трапецією (рис. 132).

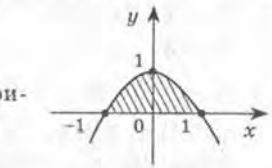


Рис. 132

Тоді

$$V=\int_{-1}^{1}\pi\left(1-x^2\right)^2dx=\pi\int_{-1}^{1}\left(1-2x^2+x^4\right)dx=$$

$$=\pi\left(x-2\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_{-1}^{1}=\pi\left(1-\frac{2}{3}+\frac{1}{5}-\left(-1+\frac{2}{3}-\frac{1}{5}\right)\right)=$$

$$=\pi\left(1-\frac{2}{3}+\frac{1}{5}+1-\frac{2}{3}+\frac{1}{5}\right)=\pi\left(2-\frac{4}{3}+\frac{2}{5}\right)=$$

$$=\frac{16}{15}\pi=1\frac{1}{15}\pi.$$

Відповідь. $1\dfrac{1}{15}\pi.$

Приклад 2. Визначити площу фігури, обмеженої лініями $y=3+2x-x^2$, $y=0$, $x+y-5=0$.

Розв'язання.

На координатній площині зображаємо задані лінії (рис. 133).

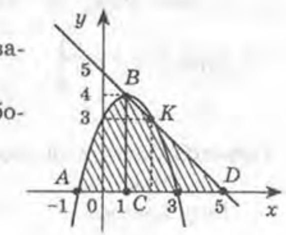


Рис. 133

Графіком функції $y=3+2x-x^2$ є парабола, вітки якої напрямлені вниз.

Знайдемо нулі даної функції:

$-x^2+2x+3=0;\quad x^2-2x-3=0;$

$$\left[\begin{array}{l}x=3,\\ x=-1.\end{array}\right.$$

$y(0)=3.$

Знайдемо координати $(m;\ n)$ вершини параболи:

$$m=\frac{-b}{2a}=\frac{-2}{-2}=1;\quad n=y(m)=y(1)=-1^2+2\cdot1+3=4.$$

Графіком функції $y=5-x$ є пряма, яка проходить через точки $(5;\ 0)$ і $(0;\ 5)$.

Визначимо координати точок перетину параболи $y = 3 + 2x - x^2$ з прямою $y = 5 - x$:

$$\begin{cases} y = 3 + 2x - x^2, \\ y = 5 - x; \end{cases}$$

$5 - x = 3 + 2x - x^2$; $x^2 - 3x + 2 = 0$;

$x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $y_1 = 5 - 1 = 4$; $y_2 = 5 - 2 = 3$.

Отже, $B(1; 4)$, $K(2; 3)$ — точки перетину параболи $y = 3 + 2x - x^2$ з прямою $y = 5 - x$.

$S_{ABKD} = S_{ABC} + S_{\triangle BCD}$;

$$S_{ABC} = \int_{-1}^{1} (3 + 2x - x^2)\,dx = \left(3x + 2\cdot\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{1} =$$

$$= \left(3x + x^2 - \frac{1}{3}x^3\right)\Bigg|_{-1}^{1} = 3\cdot 1 + 1^2 - \frac{1}{3}\cdot 1^3 - \left(3\cdot(-1) + (-1)^2 - \frac{1}{3}\cdot(-1)^3\right) =$$

$$= 3 + 1 - \frac{1}{3} + 3 - 1 - \frac{1}{3} = 6 - \frac{2}{3} = 5\frac{3}{3} - \frac{2}{3} = 5\frac{1}{3};$$

$$S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} BC \cdot CD = \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 4 = 8;$$

$$S_{ABKD} = 5\frac{1}{3} + 8 = 13\frac{1}{3}.$$

Відповідь. $13\frac{1}{3}$.

Приклад 3. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y = 2 - x - x^2$, $y = 2 + x$.

Розв'язання.

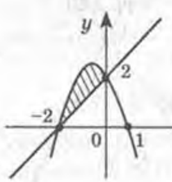


Рис. 134

На координатній площині зображаємо задані лінії (рис. 134).

Графіком функції $y = 2 - x - x^2$ є парабола, вітки якої напрямлені вниз. Знайдемо нулі даної функції: $2 - x - x^2 = 0$; $x^2 + x - 2 = 0$;

$$\left[\begin{array}{l} x = -2, \\ x = 1. \end{array}\right.$$

$y(0) = 2$.

Графіком функції $y = 2 + x$ є пряма, що проходить через точки (0; 2) і (−2; 0).

Знайдемо абсциси точок перетину параболи $y = 2 - x - x^2$ з прямою $y = 2 + x$:

$$\begin{cases} y = 2 - x - x^2, \\ y = 2 + x; \end{cases}$$

$2 - x - x^2 = 2 + x$;

$x^2 + 2x = 0$; $x(x + 2) = 0$;

$$\left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x + 2 = 0; \end{array}\right. \quad \begin{cases} x = 0, \\ x = -2. \end{cases}$$

$$S = \int_{-2}^{0} \left(2 - x - x^2 - (2 + x)\right)dx = \int_{-2}^{0} \left(2 - x - x^2 - 2 - x\right)dx =$$

$$= \int_{-2}^{0} (-x^2 - 2x)\,dx = \left(-\frac{x^3}{3} - \frac{2x^2}{2}\right)\Bigg|_{-2}^{0} = \left(-\frac{1}{3}x^3 - x^2\right)\Bigg|_{-2}^{0} =$$

$$= 0 - \left(-\frac{1}{3}\cdot(-2)^3 - (-2)^2\right) = -\frac{8}{3} + 4 = \frac{-8 + 12}{3} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}.$$

Відповідь. $1\frac{1}{3}$.

Приклад 4. Обчислити площу фігури, обмеженої координатними осями, графіком функції $y = -\frac{x^2}{2} - 1$ і дотичною до графіка цієї функції в точці з абсцисою $x_0 = 2$.

Розв'язання.

$y' = -\frac{1}{2}\cdot 2x = -x$; $y'(2) = -2$;

$y(2) = -\frac{2^2}{2} - 1 = -2 - 1 = -3$.

Отже, рівняння дотичної має вигляд:

$y = -2(x - 2) - 3 = -2x + 4 - 3 = -2x + 1$.

Дана пряма проходить через точки (2; −3); (0; 1).

Графіком функції $y = -\frac{x^2}{2} - 1$ є парабола, вітки якої напрямлені вниз (рис. 135).

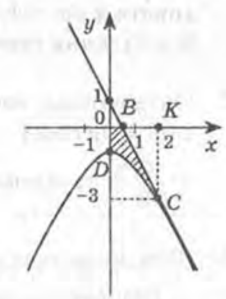


Рис. 135

Тоді $S_{DOBC} = S_{DOKC} - S_{\triangle BKC}$.

Знайдемо абсцису точки перетину прямої $y = -2x + 1$ з віссю абсцис:

$-2x + 1 = 0;\ \ -2x = -1;\ \ x = \frac{1}{2} = 0,5.$

$$S_{DOKC} = -\int_0^2 \left(-\frac{x^2}{2} - 1\right) dx = \int_0^2 \left(\frac{x^2}{2} + 1\right) dx = \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + x\right)\Bigg|_0^2 =$$

$$= \left(\frac{x^3}{6} + x\right)\Bigg|_0^2 = \frac{2^3}{6} + 2 - 0 = \frac{8}{6} + 2 = \frac{4}{3} + 2 = 1\frac{1}{3} + 2 = 3\frac{1}{3};$$

$S_{\triangle BKC} = \frac{1}{2}\cdot BK \cdot KC;$

$BK = 2 - 0,5 = 1,5;\quad KC = 0 - (-3) = 3;$

$S_{\triangle BKC} = \frac{1}{2}\cdot 1,5\cdot 3 = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4};$

$S_{DOBC} = 3\frac{1}{3} - 2\frac{1}{4} = 3\frac{4}{12} - 2\frac{3}{12} = 1\frac{1}{12}.$

Відповідь. $1\frac{1}{12}$.

Перевір себе

Вправи для самостійного розв'язування

1. Швидкість точки, яка рухається прямолінійно, задається формулою $v(t) = t^2 + 2t - 1$. Записати формулу залежності її координати x від часу t, якщо відомо, що в початковий момент часу ($t = 0$) точка перебувала в початку координат.

2. Матеріальна точка рухається прямолінійно зі швидкістю $v(t) = \sin t \cos t$ м/с. Знайти рівняння руху точки, якщо при $t = \frac{\pi}{3}$ с пройдений шлях становить $\frac{17}{8}$ м.

3. Швидкість точки, яка рухається прямолінійно, задається формулою $v(t) = 2\cos\frac{t}{2}$. Записати формулу залежності координати точки від часу, якщо відомо, що в момент $t = \frac{\pi}{3}$ с точка перебувала на відстані 4 м від початку координат.

4. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями.
   1) $y = 4 - x^2,\ y = 2 - x;$
   2) $y = 2x^2 - x,\ y = 2x + 2;$
   3) $y = x^2 - 4x + 4,\ y = 2x + 4;$
   4) $y = 2x^2 - 3x + 3,\ y = 3 - x^2;$
   5) $y = \sqrt{x},\ y = x;$
   6) $y = x^2 - 3x + 4,\ y = 4 - 2x^2;$
   7) $y = \frac{1}{x},\ y = 0,5,\ x = 1;$
   8) $y = -x^2 + 2x + 1,\quad y = x^2 - 4x + 5;$
   9) $y = \frac{7}{x},\ x + y = 8;$
   10) $y = 6 - x^2,\ y = 5;$
   11) $y = x^2,\ y = 4x - x^2;$
   12) $y = 2^x,\ y = 2,\ x = -1;$
   13) $xy = 7,\ y = 0,\ x = 4,\ x = 12;$
   14) $y = 2x^2 + 1,\ y = x + 2;$
   15) $y = 4x - x^2,\ y - x = 0;$
   16) $y = x^2,\ y = \frac{1}{x},\ y = 0,\ x = 2;$
   17) $y = x^3,\ y = 1;\ x = 2;$
   18) $y = \frac{1}{x^2},\ y = 0,\ x = 0,5,\ x = 2,5;$
   19) $y = \frac{5}{x},\ y = 6 - x.$

5. Знайти площу фігури, обмеженої параболою $y = 2x - x^2$, дотичною, проведеною до даної параболи в точці з абсцисою $x_0 = 2$, та віссю ординат.

6. Знайти площу фігури, обмеженої параболою $y = 3x - x^2$, дотичною, проведеною до даної параболи в точці з абсцисою $x_0 = 3$, та віссю ординат.

7. Обчислити площу фігури, обмеженої прямою $y = 4$, параболою $y = 3x^2 - 10 + 7$ та дотичною до параболи, проведеною через точку з абсцисою $x_0 = 2$.

8. Обчислити площу фігури, обмеженої прямою $y = -2$, параболою $y = 2 - x^2$ і дотичною до параболи, проведеною через точку з абсцисою $x_0 = 1$.

9. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі абсцис фігури, обмеженої лініями:
   1) $y = \sqrt{x}$, $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$;
   2) $y = 1 - x^2$, $y = 0$;
   3) $y = x^2$, $y = x$;
   4) $y = x + 2$, $y = 1$, $x = 0$, $x = 2$.

РОЗДІЛ 7. КОМБІНАТОРИКА. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА СТАТИСТИКИ

§ 1. Правила суми, добутку. Перестановки. Розміщення. Комбінації

Це треба знати!

1. Правило суми

Якщо елемент a можна вибрати m способами, а елемент b — n способами, то вибір «a або b» можна здійснити $m + n$ способами.

Наприклад, якщо на столі лежать 8 яблук і 4 груші, то вибрати один із фруктів можна $8 + 3 = 11$ способами.

2. Правило добутку

Якщо елемент a можна вибрати m способами, а після цього елемент b можна вибрати n способами, то вибір «a і b» можна здійснити $m \cdot n$ способами.

Наприклад, якщо на столі лежать 8 яблук і 3 груші, то вибрати пару фруктів — яблуко і грушу можна $8 \cdot 3 = 24$ способами.

3. Перестановки

Будь-яка впорядкована множина (порядок елементів істотний), яка складається з n елементів, називається ***перестановкою*** з n елементів.

P_n — число перестановок з n елементів.

$P_n = n!$, де $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ...(n - 1) \cdot n$, $(0! = 1)$.

4. Розміщення

Будь-яка впорядкована підмножина з n елементів даної множини, яка містить m елементів $(n \le m)$, називається ***розміщенням*** з m елементів по n.

A_m^n — число розміщень з m елементів по n;

$$A_m^n = \frac{m!}{(m-n)!}.$$

5. Комбінації

Будь-яка підмножина з n елементів (порядок елементів не істотний) даної множини, яка містить m елементів, називається ***комбінацією*** з m елементів по n.

C_m^n — число комбінацій з m елементів по n;

$$C_m^n = \frac{m!}{n!(m-n)!}.$$

6. Біном Ньютона

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^m a^{n-m} b^m + \ldots + C_n^n b^n.$$

Нехай T_k — k-ий член розкладу, тоді $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$.

Самовчитель

Приклад 1. Знайти член розкладу $\left(x + \frac{1}{x^4}\right)^{10}$, який не містить x.

Розв'язання.

$T_{k+1} = C_{10}^k \cdot x^{10-k} \left(\frac{1}{x^4}\right)^k$, тоді $10 - k - 4k = 0$; $-5k = -10$;

$k = 2$.

Звідси $T_{2+1} = T_3 = C_{10}^2 = \frac{10!}{2!\cdot 8!} = \frac{8!\cdot 9\cdot 10}{2\cdot 8!} = 9\cdot 5 = 45$.

Відповідь. 45.

Приклад 2. У розкладі $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{10}$ знайти член, що містить x^4.

Розв'язання.

$$\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{10} = \left(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}\right)^{10}.$$

$$T_{k+1} = C_{10}^k \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{10-k} \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)^k = C_{10}^k \cdot x^{\frac{10-k}{2} - \frac{k}{2}},$$

тоді $\frac{10-k}{2} - \frac{k}{2} = 4$; $\frac{10-2k}{2} = 4$; $10 - 2k = 8$; $-2k = -2$; $k = 1$.

Звідси $T_2 = C_{10}^1 x^4 = \frac{10!}{1!\cdot 9!} x^4 = \frac{9!\cdot 10}{9!} x^4 = 10x^4$.

Відповідь. $T_2 = 10x^4$.

Приклад 3. Скількома способами можна п'ять солдат вишикувати в колону по одному.

Розв'язання.

$P_5 = 5! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 = 120$.

Відповідь. 120 способами.

Приклад 4. Знайти кількість різних трицифрових чисел, які можна скласти з цифр 0, 4, 5, що не повторюються.

Розв'язання.

$P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6.$

Перестановки, що починаються з цифри 0, не є записом трицифрового числа. Тому шукана кількість трицифрових чисел дорівнює $P_3 - P_2 = 3! - 2! = 6 - 2 = 4$.

Відповідь. 4.

Приклад 5. На полиці стоять вісім підручників. Скількома способами можна поставити ці книги на полицю так, щоб алгебра, геометрія і фізика стояли поруч?

Розв'язання.

Будемо розглядати підручники з алгебри, геометрії, фізики як одну книгу. Тоді на полиці треба розмістити не вісім книг, а 6. Це можна зробити P_6 способами. Алгебру, геометрію і фізику можна розмістити P_3 способами. Використовуючи правило множення, маємо, що шукана кількість способів дорівнює $P_6 \cdot P_3 = 6! \cdot 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 = 36 \cdot 120 = 4320$.

Відповідь. 4320 способами.

Приклад 6. З 12 учнів треба вибрати трьох чергових. Скількома способами можна зробити такий вибір?

Розв'язання.

$$C_{12}^3 = \frac{12!}{3!\cdot(12-3)!} = \frac{12!}{3!\cdot 9!} = \frac{9!\cdot 10\cdot 11\cdot 12}{3!\cdot 9!} = \frac{10\cdot 11\cdot 12}{6} =$$

$$= 10\cdot 11\cdot 2 = 110\cdot 2 = 220.$$

Відповідь. 220 способами.

Приклад 7. Знайти кількість двоцифрових чисел, які можна скласти з цифр 1, 2, 3, 4, 5, якщо цифри в числі не повторюються.

Розв'язання.

$$A_5^2 = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5!}{3!} = \frac{3!\cdot 4\cdot 5}{3!} = 20.$$

Відповідь. 20.

Приклад 8. У кошику лежать 8 різних яблук і 4 різні груші. Треба вибрати 3 яблука і 2 груші. Скількома способами це можна зробити?

Розв'язання.

Вибрати 3 яблука з 8 можна C_8^3 способами. Вибрати 2 груші з 4 можна C_4^2 способами. Тоді за правилом добутку вибір потрібних фруктів можна здійснити $C_8^3 \cdot C_4^2$ способами.

$$C_8^3 \cdot C_4^2 = \frac{8!\cdot 4!}{3!\cdot 5!\cdot 2!\cdot 2!} = \frac{\cancel{5!}\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot \cancel{3!}\cdot \cancel{4}}{\cancel{3!}\cdot \cancel{5!}\cdot \cancel{2\cdot 2}} = 6\cdot 7\cdot 8 = 336.$$

Відповідь. 336 способами.

Перевір себе

Вправи для самостійного розв'язування

1. З 10 різних книг вибирають 4 для посилки. Скількома способами це можна зробити?

2. У профком вибрали 9 чоловік. З них треба вибрати голову, його заступника та секретаря. Скількома способами це можна зробити?

3. На конференції присутні 15 чоловік. Скількома способами можна вибрати 5 делегатів?

4. У класі навчаються 16 хлопчиків і 10 дівчаток. Для прибирання території необхідно виділити чотирьох хлопчиків і двох дівчаток. Скількома способами це можна зробити?

5. Скільки різних чотиризначних чисел можна записати за допомогою цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 без їх повторення?

6. Знайти кількість різних чотирицифрових чисел, які можна скласти з цифр 0, 4, 8, 9, якщо цифри в числі не повторюються.

7. Є дванадцять книг, з яких п'ять підручники. Скількома способами можна поставити ці книги на полицю так, щоб підручники стояли поруч?

8. Будівельна організація виділила для будівництва школи бригаду з 5 робітників. В організації працюють 20 робітників, у тому числі 5 мулярів, 4 теслярі й 2 штукатури. Скількома способами можна укомплектувати бригаду, щоб до її складу входило по одному робітнику кожної з цих спеціальностей?

9. Збори із 80 чоловік обирають голову, секретаря і трьох членів ревізійної комісії. Скількома способами це можна зробити?

10. Четверо юнаків і дві дівчини вибирають спортивну секцію. У секції хокею і боксу приймають тільки юнаків, у секцію художньої гімнастики — тільки дівчат, а в лижну і ковзанярську

секції — і юнаків, і дівчат. Скількома способами можуть розподілитися між секціями ці шість осіб?

11. Із лабораторії, у якій працює 20 чоловік, 5 співробітників повинні поїхати у відрядження. Скільки може бути різних складів цієї групи, якщо начальник лабораторії, його заступник і головний інженер одночасно їхати не можуть?

12. У фортепіанному гуртку навчаються 10 чоловік, у гуртку художнього слова — 15, у вокальному гуртку — 12 і в фотогуртку — 20 чоловік. Скількома способами можна утворити бригаду із чотирьох читців, трьох піаністів, п'яти співаків і одного фотографа?

13. Знайти:

1) четвертий член розкладу $(a+2)^6$;

2) дев'ятий член розкладу $\left(a+\sqrt{b}\right)^{10}$;

3) п'ятий член розкладу $\left(a^2+b\right)^{11}$;

4) середній член розкладу $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^8$.

14. Знайти член розкладу бінома:

1) $\left(\sqrt{a}+\sqrt[4]{a}\right)^{20}$, що містить a^7;

2) $\left(\sqrt[3]{a}-\dfrac{1}{\sqrt{a}}\right)^{15}$, що не містить a;

3) $\left(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[5]{x^3}\right)^{12}$, що містить $x^{\frac{22}{3}}$;

4) $\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{a^2}}+\sqrt[4]{a^3}\right)^{17}$, що не містить a.

15. Знайти показник степеня бінома, якщо:

1) шостий член розкладу $\left(a^{-\frac{1}{30}}+\sqrt[5]{a}\right)^n$ не містить a;

2) шостий член розкладу $\left(\dfrac{a}{\sqrt[4]{a^3}}-\sqrt[5]{a^3}\right)^n$ не залежить від a.

16. Третій доданок розкладу $\left(2x+\dfrac{1}{x^2}\right)^m$ не містить x. При яких значеннях x цей доданок дорівнює другому доданку розкладу $\left(1+x^3\right)^{30}$?

17. Номер автомобіля складається з двох літер і чотирьох цифр. Скільки різних номерів можна скласти, використовуючи 30 літер і 10 цифр, якщо літери і цифри в номері не повторюються?

18. Із вази, де стоять 10 червоних і 4 рожевих гвоздики, вибирають одну червону і дві рожеві квітки. Скількома способами це можна зробити?

§ 2. Елементи теорії ймовірностей

Це треба знати!

1. Подія

Подія — первісне поняття теорії ймовірностей. Під подією розуміють будь-яке явище, про яке можна сказати, що воно відбувається чи не відбувається.

Будь-яка подія відбувається внаслідок випробування або експерименту.

Події, які можуть відбутися, а можуть і не відбутися в процесі випробування або експерименту в однакових умовах, називаються ***випадковими подіями***.

Події позначають великими буквами латинського алфавіту: A, B, ...

Події $A_1, A_2, \dots, A_n$ називаються ***попарно несумісними*** в даному випробуванні, якщо ніякі дві з них не можуть відбутися разом.

Імовірною називається подія, яка внаслідок даного випробування обов'язково має відбутися.

Неможливою називається така подія, яка внаслідок даного випробування не може відбутися.

Рівноможливі події — події, кожна з яких не має ніяких переваг у появі частіше за іншу під час багаторазових випробувань, що проводяться за однакових умов.

2. Ймовірність випадкової події

Ймовірністю випадкової події A називається відношення кількості подій, які сприяють цій події, до кількості всіх рівноможливих подій, які утворюють певну групу подій під час певного випробування:

$P(A) = \dfrac{m}{n}$, де $P(A)$ — ймовірність події A;

m — кількість подій, які сприяють події A;

n — кількість усіх рівноможливих подій, які утворюють певну групу подій під час певного випробування.

$0 \le P(A) \le 1$.

Подія $\bar{A}$ називається ***протилежною*** події A, якщо вона відбувається тоді і тільки тоді, коли не відбувається подія A.

$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

3. Ймовірність суми двох несумісних подій

Сумою подій A і B називається подія $A + B$, яка відбувається тоді і тільки тоді, коли відбувається подія A або подія B.

Ймовірність суми двох несумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій: $P(A + B) = P(A) + P(B)$.

4. Теорема множення ймовірностей

Добутком подій A і B називається подія $A \cdot B$, яка відбувається тоді і тільки тоді, коли відбуваються обидві події A і B.

Ймовірність добутку двох подій дорівнює добутку ймовірності однієї з них на умовну ймовірність другої події, яка обчислюється за умови, що перша подія вже відбулася:

$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P_A(B)$,

де $P(B)$ — ймовірність події B за умови, що відбулася подія A.

Подія B називається ***незалежною*** від події A, якщо поява A не змінює ймовірності події B. Тоді

$P_A(B) = P(B)$ і $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$.

Ймовірність появи хоча б однієї з незалежних подій $A_1, A_2, \dots A_n$ можна обчислити за формулою:

$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = 1 - (1 - P(A_1))(1 - P(A_2)) \cdot \dots \cdot (1 - P(A_n))$.

5. Формула Бернуллі

Нехай проводять n незалежних експериментів, у кожному з яких подія A може відбутися, а може й не відбутися. Ймовірність того, що подія A відбудеться, у кожному з експериментів однакова і дорівнює p, а ймовірність того, що подія A не відбудеться, дорівнює $q = 1 - p$. Тоді ймовірність того, що в n незалежних експериментах подія A відбудеться точно m разів обчислюється за формулою Бернуллі: $P_{m,n} = C_n^m p^m q^{n-m}$.

Самовчитель

Приклад 1. У класі навчається 20 учнів, 15 із них відвідують математичний гурток. Яка ймовірність того, що навмання обраний учень виявиться членом математичного гуртка?

Розв'язання.

Нехай A — подія «навмання вибраний учень є членом математичного гуртка». Одного учня з 15 можна вибрати 15 способами, а одного учня з 20 можна вибрати 20 способами.

$m = 15$; $n = 20$.

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}.$$

Відповідь. $\frac{3}{4}$.

Приклад 2. Із 15 робітників 10 — штукатури, а 5 — маляри. Навмання відбирається бригада з 5 робітників. Яка ймовірність того, що серед них буде 3 маляра і 2 штукатура?

Розв'язання.

Нехай A — подія «у навмання вибраній бригаді буде 3 маляра і 2 штукатура», тоді $n = C_{15}^5$.

Трьох мулярів із 5 можна вибрати C_5^3 способами, двох штукатурів з 10 можна вибрати C_{10}^2 способами, а 3 малярів із 5 і 2 штукатурів з 10 можна вибрати $C_5^3 \cdot C_{10}^2$ способами, тому

$$m = C_5^3 \cdot C_{10}^2;$$

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_5^3 \cdot C_{10}^2}{C_{15}^5}.$$

Відповідь. $\frac{C_5^3 \cdot C_{10}^2}{C_{15}^5}$.

Приклад 3. У коробці 8 кульок, із них 3 білі. Навмання беруть одну за одною дві кульки, причому взяту кульку в коробку не повертають. Знайти ймовірність того, що обидві кульки будуть білі.

Розв'язання.

Нехай A — подія «перша взята кулька біла», B — подія «друга взята кулька біла», тоді AB — подія «обидві взяті кульки білі», тоді

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{3}{8}.$$

Після того, як відбулася подія A, у коробці залишилося 7 кульок, із них тільки 2 білі. Отже,

$$P_A(B) = \frac{2}{7};$$

$$P(AB) = P(A) \cdot P_A(B) = \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} = \frac{3}{28}.$$

Відповідь. $\frac{3}{28}$.

Приклад 4. Два стрільці стріляють незалежно один від одного в одну й ту саму ціль. Ймовірність влучання для першого стрільця дорівнює 0,8, а для другого — 0,7. Визначити ймовірність влучання в ціль.

Розв'язання.

Нехай подія A — у ціль влучив хоча б один із стрільців.

B — подія «у ціль влучив перший стрілець»;

C — подія «у ціль влучив другий стрілець», тоді

$$P(A) = 1 - (1 - P(A))(1 - P(B)) = 1 - (1 - 0,8)(1 - 0,7) =$$

$$= 1 - 0,2 \cdot 0,3 = 1 - 0,06 = 0,94.$$

Відповідь. 0,94.

Приклад 5. Знайти ймовірність того, що при 20 киданнях грального кубика три очка випаде рівно 4 рази.

Розв'язання.

Нехай подія A — випало три очка при киданні грального кубика:

$$P(A) = p = \frac{1}{6}; \quad q = 1 - p = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}.$$

Отже, за формулою Бернуллі, маємо:

$$P_{4,20} = C_{20}^4 \left(\frac{1}{6}\right)^4 \left(\frac{5}{6}\right)^{16} = \frac{20! \cdot 5^{16}}{4! \cdot 16! \cdot 6^{20}} =$$

$$= \frac{\cancel{16!}^{1} \cdot 17 \cdot 18 \cdot 19 \cdot \cancel{20}^{5} \cdot 5^{16}}{\cancel{16!}_{1} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cancel{4}_{1} \cdot 6^{20}} = \frac{17 \cdot \cancel{18}^{3} \cdot 19 \cdot 5 \cdot 5^{16}}{\cancel{6}_{1} \cdot 6^{20}} =$$

$$= \frac{15 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 5^{16}}{6^{20}} = \frac{4845 \cdot 5^{16}}{6^{20}}.$$

Відповідь. $\frac{4845 \cdot 5^{16}}{6^{20}}$.

Вправи для самостійного розв'язування

Перевір себе

1. Яка ймовірність того, що навмання вибране двозначне число ділиться на 3?

2. В урні 10 білих і 3 червоних кульок. Яка ймовірність витягнути із урни червону кульку?

3. Підкинули два гральних кубика. Яка ймовірність того, що сума очків на гранях, які випали, дорівнює семи?

4. При перевезенні 100 деталей, із яких 10 були забраковані, загубилася одна стандартна деталь. Знайти ймовірність того, що навмання взята деталь виявиться стандартною.

5. В урні n білих і m червоних кульок. Яка ймовірність того, що навмання взяті дві кульки виявляться червоними?

6. Набираючи номер телефона, абонент забув три останні цифри і, пам'ятаючи тільки, що вони різні, набрав їх навмання. Яка ймовірність того, що він набрав потрібні цифри?

7. В урні n білих, m чорних, k червоних кульок. Навмання виймають три кульки. Яка ймовірність того, що всі вони будуть різного кольору?

8. На книжковій полиці розставлені 4 книги з алгебри і 3 з геометрії. Знайти ймовірність того, що книги з кожного предмету стоять поруч.

9. У коробці 15 деталей, 5 із яких пофарбовані. Навмання витягують 5 деталей. Знайти ймовірність того, що 4 із них пофарбовані, а одна — ні.

10. Є 6 квитків у театр, 4 із яких на місця першого ряду. Яка ймовірність того, що із трьох навмання вибраних квитків два виявляться на місця першого ряду?

11. У коробці 5 білих і 4 чорних кульки. З коробки навмання витягують одну за одною дві кульки і в коробку не повертають. Знайти ймовірність того, що друга кулька біла, якщо перша кулька: 1) біла; 2) чорна.

12. У коробці лежать 12 червоних, 8 зелених і 10 синіх кульок. Навмання одну за одною беруть три кульки і в коробку не повертають. Знайти ймовірність того, що перша кулька буде червоною, друга — зеленою, а третя — синьою.

13. Три стрільці, для яких ймовірності влучення в мішень дорівнюють 0,8; 0,75; 0,7, роблять по одному пострілу по одній цілі. Знайти ймовірність того, що:
1) всі три стрільці влучать у ціль;
2) хоча б один із стрільців влучить у ціль;
3) тільки один із стрільців влучить у ціль;
4) тільки двоє із стрільців влучать у ціль.

14. Знайти ймовірність того, що при 6 киданнях грального кубика число очків, кратних 3, випаде рівно:
1) два рази; 2) п'ять разів.

§ 3. Елементи статистики

Це треба знати!

Сукупність, із якої роблять відбір одиниць спостереження, називають ***генеральною сукупністю***.

Сукупність одиниць, відібраних для вибіркового спостереження, називають ***вибіркою***.

Рядом розподілу називають ряд чисел, які характеризують розподіл одиниць досліджуваної сукупності.

Ряд чисел, які характеризують розподіл одиниць досліджуваної сукупності залежно від величини ознаки, називається ***варіаційним рядом***.

Мода — це значення ознаки, яке трапляється найчастіше в даному ряді розподілу.

Медіана — це середня величина змінюваної ознаки, яка міститься в середині ряду, розміщеного в порядку зростання значень ознаки:

— якщо кількість чисел ряду непарна, то медіана — це число, розміщене посередині;
— якщо кількість чисел ряду парна, то медіана — це середнє арифметичне двох чисел, що стоять посередині.

Середнім значенням випадкової величини X називають середнє арифметичне всіх її значень:

$$\bar{X} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}.$$

Якщо випадкова величина X набуває значення $x_1, x_2, \ldots, x_k$ відповідно до частот $m_1, m_2, \ldots, m_k$, то

$$\bar{X} = \frac{x_1m_1 + x_2m_2 + \ldots + x_km_k}{n},$$

де $n = m_1 + m_2 + \ldots + m_k$.

Середнє квадратичне відхилення

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \cdot M}{n}},\ \text{де}\ n = \sum M,\ M \text{ — частота розподілу.}$$

Самовчитель

Приклад 1. Дано вибірки:

а) 1; 2; 8; 4; 2; 3; 5; 4; 2; 3;

б) 2; 4; 2; 5; 2; 3; 4; 8; 4; 3;

в) 1; 2; 3; 2; 2; 1; 3; 3; 1.

Знайти моду й медіану.

Розв'язання.

Числові дані кожної вибірки розмістимо в порядку зростання:

а) 1; 2; 2; 2; 3; 3; 4; 4; 5; 8;

б) 2; 2; 2; 3; 4; 4; 4; 5; 8;

в) 1; 1; 1; 2; 2; 2; 3; 3; 3.

а) $Mo = 2;\ Me = \dfrac{3+3}{2} = \dfrac{6}{2} = 3;$

б) $Mo_1 = 2;\ Mo_2 = 4;\ Me = 4;$

в) моди не має, $Me = 2$.

Приклад 2. Випадкова величина X має розподіл по частотах M, як показано в таблиці:

X	2	5	6	8	10
M	1	3	2	1	2

Знайти середнє квадратичне відхилення.

Розв'язання.

$$\bar{X} = \frac{2\cdot1 + 5\cdot3 + 6\cdot2 + 8\cdot1 + 10\cdot2}{1+3+2+1+2} = \frac{57}{9} \approx 6{,}3;$$

X	2	5	6	8	10
M	1	3	2	1	2
$X - \bar{X}$	–4,3	–1,3	–0,3	1,7	3,7
$(X - \bar{X})^2$	18,49	1,69	0,09	2,89	13,69
$(X - \bar{X})^2 M$	18,49	5,07	0,18	2,89	27,38

$n = \sum M = 1 + 3 + 2 + 1 + 2 = 9;$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2 M}{n}} = \sqrt{\frac{18{,}49 + 5{,}07 + 0{,}18 + 2{,}89 + 27{,}38}{9}} \approx 2{,}4.$$

Відповідь. $\sigma \approx 2{,}4$.

Вправи для самостійного розв'язування

Перевір себе

1. Знайти моду, медіану й середнє значення ряду даних деякої випадкової величини X:
1) 2; 1; 3; 1; 4; 1; 5; 8;
2) 4; 8; 7; 4; 2; 1; 5; 10;
3) 3; 2; 3; 1; 2; 2; 4; 5; 8; 5; 7;
4) 7; 8; 1; 2; 1; 3; 2; 4; 2; 4; 5; 4.

2. Знайти моду, медіану, середнє квадратичне відхилення, якщо випадкова величина X має розподіл по частотах M, як показано в таблиці:

1)

X	1	3	2	5
M	2	0	4	1

2)

X	2	4	8	6	7	8	5
M	3	1	2	4	1	2	1

РОЗДІЛ 8. ГЕОМЕТРІЯ

§ 1. Трикутники. Коло і круг

Це треба знати!

1. Кут

Кутом називається геометрична фігура, яка складається з точки і двох променів, що виходять із цієї точки. Промені називаються *сторонами кута*, а їх спільний початок — *вершиною кута*.

Кут називається ***розгорнутим***, якщо обидві його сторони лежать на одній прямій (рис. 136).

Одиницею вимірювання кутів є ***градус*** — кут, який становить $\frac{1}{180}$ частину розгорнутого кута.

Рівні кути мають рівні градусні міри.

Кут називається ***прямим***, якщо він дорівнює 90° (рис. 137), ***гострим***, якщо він менший 90° (рис. 138), ***тупим***, якщо він більший 90°, але менший 180° (рис. 139).

Рис. 136

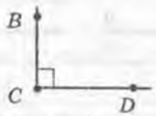


Рис. 137

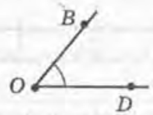


Рис. 138

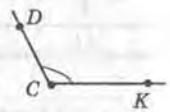


Рис. 139

$\angle AOB$ — розгорнутий; $\angle AOB = 180°$.

$\angle BCD$ — прямий; $\angle BCD = 90°$.

$\angle BOD$ — гострий, $\angle BOD < 90°$.

$\angle DCK$ — тупий; $90° < \angle DCK < 180°$.

Кажуть, що промінь проходить між сторонами кута, якщо він виходить із його вершини і перетинає деякий відрізок із кінцями на сторонах кута.

Основні властивості вимірювання кутів

1) Кожний кут має певну градусну міру, більшу від нуля.
2) Градусна міра кута дорівнює сумі градусних мір кутів, на які він розбивається будь-яким променем, що проходить між його сторонами (рис. 140).
$\angle AOB = \angle AOC + \angle COB$.

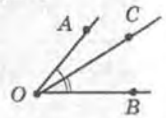


Рис. 140

2. Суміжні й вертикальні кути

Два кути, у яких одна сторона спільна, а дві інші сторони є продовженням одна одної, називаються ***суміжними*** (рис. 141).

$\angle AOC$ і $\angle COB$ — суміжні кути.

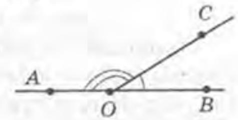


Рис. 141

Властивості суміжних кутів

1) Сума суміжних кутів дорівнює 180°.
2) Коли два кути рівні, то суміжні з ними кути також рівні.
3) Кут, суміжний із прямим кутом, — прямий кут; кут, суміжний із гострим кутом, — тупий кут; кут, суміжний із тупим кутом, — гострий кут.
4) Чим більший кут, тим кут, який суміжний із ним, менший, і навпаки.

Два кути називаються ***вертикальними***, якщо сторони одного кута є продовженням сторін другого (рис. 142).

$\angle AOB$ і $\angle COD$; $\angle AOC$ і $\angle BOD$ — вертикальні кути.

Властивість вертикальних кутів: вертикальні кути рівні.

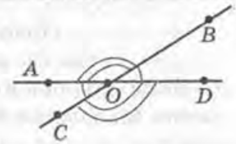


Рис. 142

3. Означення перпендикулярності прямих

Дві прямі називаються ***перпендикулярними***, якщо вони перетинаються під прямим кутом (рис. 143).

a і b — перпендикулярні $(a \perp b)$.

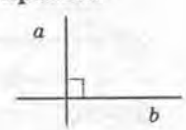


Рис. 143

4. Означення бісектриси кута

Бісектрисою кута називається промінь, який виходить із вершини кута, проходить між його сторонами і ділить кут навпіл (рис. 144).

OC — бісектриса $\angle AOB$;

$$\angle AOC = \angle COB = \frac{1}{2}\angle AOB.$$

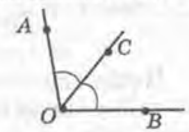


Рис. 144

5. Ознаки рівності й подібності трикутників

Трикутники називаються ***рівними***, якщо в них відповідні сторони й відповідні кути рівні.

Перша ознака рівності трикутників
(за двома сторонами і кутом між ними)

Якщо дві сторони й кут між ними одного трикутника дорівнюють відповідно двом сторонам і куту між ними другого трикутника, то такі трикутники рівні (рис. 145):

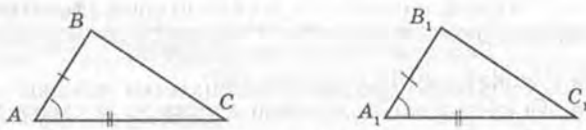


Рис. 145

$$\left.\begin{array}{l} AB = A_1B_1 \\ AC = A_1C_1 \\ \angle A = \angle A_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$$ (за двома сторонами й кутом між ними).

Друга ознака рівності трикутників
(за стороною і прилеглими до неї кутами)

Якщо сторона й прилеглі до неї кути одного трикутника дорівнюють відповідно стороні й прилеглим до неї кутам другого трикутника, то такі трикутники рівні (рис. 146):

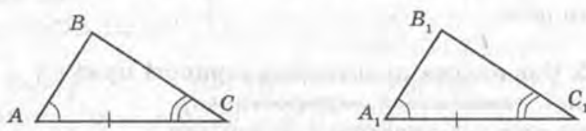


Рис. 146

$$\left.\begin{array}{l} AC = A_1C_1 \\ \angle A = \angle A_1 \\ \angle C = \angle C_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$$ (за стороною й прилеглими до неї кутами).

Третя ознака рівності трикутників
(за трьома сторонами)

Якщо три сторони одного трикутника дорівнюють відповідно трьом сторонам другого трикутника, то такі трикутники рівні (рис. 147):

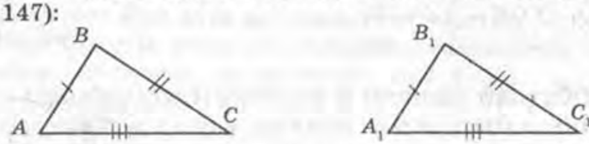


Рис. 147

$$\left.\begin{array}{l} AB = A_1B_1 \\ BC = B_1C_1 \\ AC = A_1C_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$$ (за трьома сторонами).

Два трикутники називаються ***подібними***, якщо їх кути відповідно рівні й сторони одного трикутника пропорційні відповідним сторонам другого.

Ознака подібності трикутників за двома кутами

Якщо два кути одного трикутника відповідно дорівнюють двом кутам другого трикутника, то такі трикутники подібні (рис. 148):

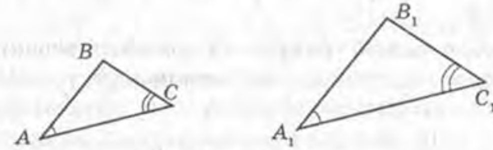


Рис. 148

$$\left.\begin{array}{l} \angle A = \angle A_1 \\ \angle C = \angle C_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$$ (за двома кутами).

Ознака подібності трикутників за двома сторонами й кутом між ними

Якщо дві сторони одного трикутника пропорційні двом сторонам другого трикутника, і кути, утворені цими сторонами, рівні, то трикутники подібні (рис. 149):

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1} \\ \angle A = \angle A_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$$

(за двома сторонами і кутом між ними).

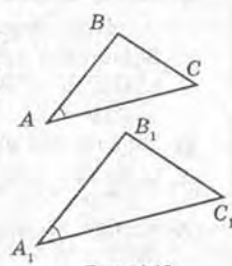


Рис. 149

Ознака подібності трикутників за трьома сторонами

Якщо сторони одного трикутника пропорційні сторонам другого трикутника, то такі трикутники подібні (рис. 150):

Якщо $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{BC}{B_1C_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1}$,

то $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ (за трьома сторонами).

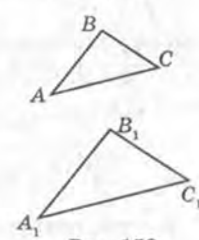


Рис. 150

Відношення периметрів та відношення площ подібних трикутників

Якщо $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$, тоді:

$$\frac{P_{\triangle ABC}}{P_{\triangle A_1B_1C_1}} = \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = k;$$

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A_1B_1C_1}} = k^2,$$ де k — коефіцієнт подібності.

6. Сума кутів трикутника. Зовнішній кут трикутника. Визначні лінії трикутника

Сума кутів трикутника дорівнює 180° (рис. 151):

$\angle A + \angle B + \angle C = 180°$.

Зовнішнім кутом трикутника при даній вершині називається кут, суміжний із кутом трикутника при цій вершині (рис. 152):

$\angle BCD$ — зовнішній кут $\triangle ABC$ при вершині C.

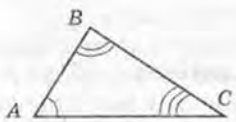


Рис. 151

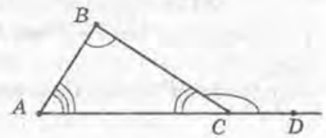


Рис. 152

Властивості зовнішнього кута трикутника

1) Зовнішній кут трикутника дорівнює сумі двох внутрішніх кутів, не суміжних із ним:
$\angle BCD = \angle A + \angle B$ (рис. 152).
2) Зовнішній кут трикутника більший від будь-якого внутрішнього кута, не суміжного з ним:
$\angle BCD > \angle A$, $\angle BCD > \angle B$ (рис. 152).

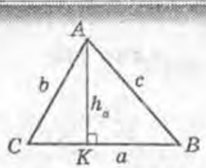


Рис. 153

Висотою трикутника, опущеною з даної вершини, називається перпендикуляр, проведений із цієї вершини до прямої, що містить протилежну сторону трикутника (рис. 153).

Нехай $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$,

h_a — висота, опущена на сторону a.

$$h_a = \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{a},$$ де $p = \frac{a+b+c}{2}$.

Висоти трикутника або їх продовження перетинаються в одній точці.

Медіаною трикутника, проведеною з даної вершини, називається відрізок, що сполучає вершину із серединою протилежної сторони трикутника.

Три медіани трикутника перетинаються в одній точці, яка ділить кожну медіану у відношенні 2 : 1, починаючи від вершини трикутника (рис. 154).

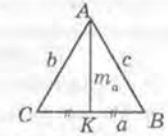


Рис. 154

m_a — медіана, що з'єднує вершину A із серединою сторони a.

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}.$$

Сторону трикутника можна обчислити за формулою:

$$a = \frac{2}{3}\sqrt{2(m_b^2+m_c^2)-m_a^2},$$ де m_a, m_b, m_c — медіани трикутника.

Бісектрисою трикутника, проведеною з даної вершини, називається відрізок бісектриси кута трикутника, що сполучає цю вершину з точкою на протилежній стороні (рис. 155).

Три бісектриси трикутника перетинаються в одній точці.

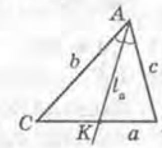


Рис. 155

l_a — бісектриса трикутника, проведена до сторони a.

$$l_a = \frac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)},$$ де $p = \frac{a+b+c}{2}$.

Властивість бісектриси трикутника

Бісектриса трикутника ділить протилежну сторону на відрізки, пропорційні двом іншим сторонам.

Якщо BK — бісектриса $\triangle ABC$,

тоді $\frac{AK}{KC} = \frac{AB}{BC}$ (рис. 156).

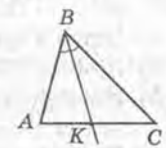


Рис. 156

Середньою лінією трикутника називається відрізок, який сполучає середини двох його сторін.

Властивість середньої лінії трикутника

Середня лінія трикутника, яка сполучає середини двох даних сторін, паралельна третій стороні й дорівнює її половині (рис. 157).

Якщо MN — середня лінія $\triangle ABC$ (рис. 157), то:

1) $MN \parallel AC$; 2) $MN = \frac{1}{2}AC$.

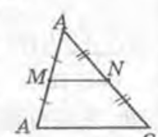


Рис. 157

7. Рівнобедрений трикутник. Рівносторонній трикутник

Трикутник називається ***рівнобедреним***, якщо в нього дві сторони рівні. Ці рівні сторони називаються ***бічними сторонами***, а третя сторона називається ***основою трикутника***.

Властивості рівнобедреного трикутника

1) У рівнобедреному трикутнику кути при основі рівні.
2) Бісектриса, медіана й висота рівнобедреного трикутника, проведені до основи, збігаються.

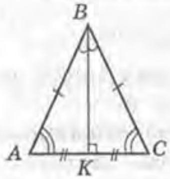


Рис. 158

Якщо $\triangle ABC$ — рівнобедрений $(AB = BC)$, BK — висота, проведена до основи AC (рис. 158), тоді:

1) $\angle A = \angle C$;
2) BK — медіана й бісектриса.

Якщо $\triangle ABC$ — рівнобедрений $(AB = BC)$, (рис. 158) BK — бісектриса, проведена до основи AC, тоді:

1) $\angle A = \angle C$;
2) BK — висота й медіана.

Якщо $\triangle ABC$ — рівнобедрений $(AB = BC)$, (рис. 158) BK — медіана, проведена до основи AC, тоді:

1) $\angle A = \angle C$;
2) BK — висота й бісектриса.

Ознаки рівнобедреного трикутника

1) Якщо в трикутнику два кути рівні, то він рівнобедрений.
2) Якщо в трикутнику медіана є висотою, то він рівнобедрений.
3) Якщо в трикутнику висота є бісектрисою, то він рівнобедрений.
4) Якщо в трикутнику бісектриса є медіаною, то він рівнобедрений.

Трикутник, у якого всі сторони рівні, називається ***рівностороннім***.

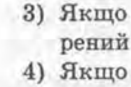


Рис. 159

Властивість кутів рівностороннього трикутника: у рівносторонньому трикутнику всі кути рівні.

Якщо $\triangle ABC$ — рівносторонній (рис. 159), тоді $\angle A = \angle B = \angle C = 60°$.

Ознака рівностороннього трикутника: якщо в трикутнику всі кути рівні, то він рівносторонній.

8. Прямокутний трикутник

Трикутник називається ***прямокутним***, якщо він має прямий кут.

Сторони прямокутного трикутника, що утворюють прямий кут, називаються ***катетами***. Сторона, протилежна до прямого кута, називається ***гіпотенузою***.

Ознаки рівності прямокутних трикутників

1) За гіпотенузою і катетом.
2) За гіпотенузою і гострим кутом.
3) За катетом і прилеглим гострим кутом.
4) За катетом і протилежним гострим кутом.

Синусом гострого кута прямокутного трикутника називається відношення протилежного катета до гіпотенузи.

Косинусом гострого кута прямокутного трикутника називається відношення прилеглого катета до гіпотенузи.

Тангенсом гострого кута прямокутного трикутника називається відношення протилежного катета до прилеглого катета.

Котангенсом гострого кута прямокутного трикутника називається відношення прилеглого катета до протилежного катета.

На рисунку 160:

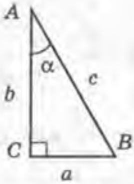


Рис. 160

1) $\sin\alpha = \dfrac{a}{c}$, звідси $a = c\cdot\sin\alpha$; $c = \dfrac{a}{\sin\alpha}$;

2) $\cos\alpha = \dfrac{b}{c}$, звідси $b = c\cdot\cos\alpha$, $c = \dfrac{b}{\cos\alpha}$;

3) $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{a}{b}$, звідси $a = b\cdot\operatorname{tg}\alpha$;

4) $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{b}{a}$, звідси $b = a\cdot\operatorname{ctg}\alpha$. Отже, катет, протилежний до гострого кута прямокутного трикутника, дорівнює добутку гіпотенузи на синус цього кута, або добутку прилеглого катета на тангенс цього кута.

Катет, прилеглий до гострого кута прямокутного трикутника, дорівнює добутку гіпотенузи на косинус цього кута, або добутку протилежного катета на котангенс цього кута.

Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює частці катета, прилеглого до гострого кута, на косинус цього кута або частці катета, протилежного до гострого кута, на синус цього кута.

Теорема Піфагора

У прямокутному трикутнику квадрат гіпотенузи дорівнює сумі квадратів катетів (рис. 161):

$AB^2 = AC^2 + BC^2$.

Рис. 161

Наслідок із теореми Піфагора: у прямокутному трикутнику будь-який із катетів менший за гіпотенузу.

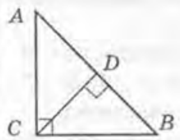


Рис. 162

Властивість катета прямокутного трикутника

Нехай $CD \perp AB$ (рис. 162),

тоді $BC = \sqrt{AB \cdot BD}$;

$AC = \sqrt{AB \cdot AD}$.

Властивість висоти прямокутного трикутника, проведеної з вершини прямого кута (рис. 162):

$CD = \sqrt{AD \cdot BD}$.

Теорема косинусів

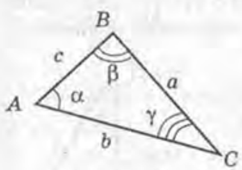


Рис. 163

Квадрат будь-якої сторони трикутника дорівнює сумі квадратів двох інших сторін без подвоєного добутку цих сторін на косинус кута між ними (рис. 163).

$a^2 = c^2 + b^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$;

$b^2 = c^2 + a^2 - 2ac \cdot \cos\beta$;

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$.

Теорема синусів

Сторони трикутника пропорційні до синусів протилежних кутів (рис. 164).

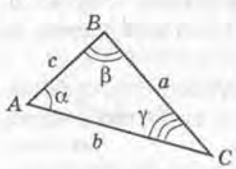


Рис. 164

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}.$$

Наслідок із теореми синусів: кожне з трьох відношень $\frac{a}{\sin\alpha}$, $\frac{b}{\sin\beta}$, $\frac{c}{\sin\gamma}$ дорівнює $2R$, де R — радіус кола, описаного навколо трикутника.

Співвідношення між кутами трикутника і протилежними сторонами

1) У трикутнику проти більшого кута лежить більша сторона, проти більшої сторони лежить більший кут.
2) Якщо в трикутнику є тупий кут, то протилежна йому сторона найбільша.

9. Коло і круг

Колом називається геометрична фігура, яка складається з усіх точок, розміщених на даній відстані від даної точки. Дана точка називається ***центром кола***, а відрізок, що сполучає центр із будь-якою точкою кола, називається ***радіусом кола***. Відрізок, що сполучає дві точки кола, називається ***хордою***. Хорда, що проходить через центр кола, називається ***діаметром***.

Довжина кола обчислюється за формулою $C = 2\pi R$, де R — радіус кола.

Кругом називається частина площини, обмежена колом.

Дотична до кола

Пряма і коло можуть мати одну або дві спільні точки й можуть не мати жодної спільної точки.

Пряма, що має з колом тільки одну спільну точку, називається ***дотичною до кола***, а їх спільна точка називається ***точкою дотику*** прямої та кола.

Властивість дотичної: дотична до кола перпендикулярна до радіуса, проведеного в точку дотику.

Властивість дотичних, проведених до кола з однієї точки: відрізки дотичних до кола, проведені з однієї точки, рівні (рис. 165): якщо AB і AC — дотичні до кола, тоді:

1) $OB \perp AB$; $OC \perp AC$;
2) $AB = AC$.

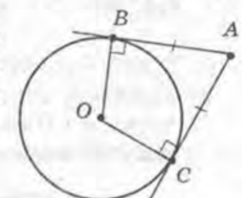


Рис. 165

Центральним кутом у колі називається плоский кут із вершиною в його центрі.

Частина кола, розміщена в середині плоского кута, називається ***дугою кола***, що відповідає цьому центральному куту.

Градусною мірою дуги кола називається градусна міра відповідного центрального кута.

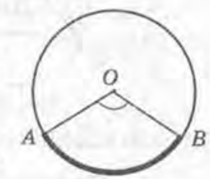


Рис. 166

На рисунку 166:

$\angle AOB$ — центральний кут;

$\smile AB$ — дуга, що відповідає $\angle AOB$;

$\smile AB = \angle AOB$.

На рисунку 167:

$\angle AOB$ — центральний кут;

$\smile AB$ — дуга, що відповідає $\angle AOB$;

$\smile AB \ne \angle AOB$.

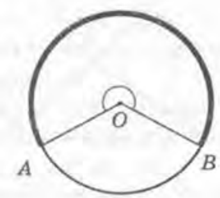


Рис. 167

Кути, вписані в коло

Кут, вершина якого лежить на колі, а сторони перетинають це коло, називається ***вписаним у коло***.

Теорема про кут, вписаний у коло

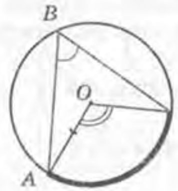


Рис. 168

Кут, вписаний у коло, дорівнює половині відповідного центрального кута.

На рисунку 168:

$\angle ABC$ — вписаний кут,

$\angle AOC$ — відповідний центральний кут,

$\angle ABC = \dfrac{1}{2}\angle AOC.$

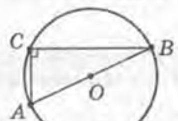


Рис. 169

Наслідки з теореми про кут, вписаний у коло:

1) вписані кути, що спираються на діаметр кола, прямі (рис. 169):

$\angle ACB = 90°$;

2) вписані кути, сторони яких проходять через точки A і B кола, а вершини лежать з одного боку від прямої AB, рівні (рис. 170);

$\angle ACB = \angle ADB = \angle AKB$;

3) два кути, вписаних в коло, сторони яких проходять через точки A і B кола, а вершини лежать по різні боки від прямої AB, доповнюють один одного до 180° (рис. 171):

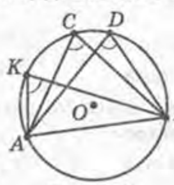


Рис. 170

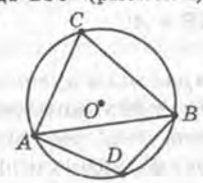


Рис. 171

$\angle ACB + \angle ADB = 180°.$

Пропорційність відрізків хорд і січних кола

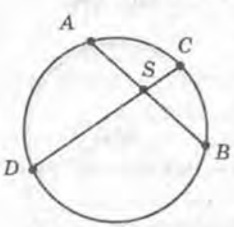


Рис. 172

Якщо хорди AB і CD перетинаються в точці S, то $AS \cdot BS = CS \cdot DS$ (рис. 172).

Якщо з точки P проведено дві січні до кола, що перетинають коло відповідно в точках A, B, C, D, то

$AP \cdot BP = CP \cdot DP$ (рис. 173).

Якщо з точки P проведено дотичну й січну до кола, які перетинають коло відповідно в точках A, B, C, то $PC^2 = PA \cdot PB$ (рис. 174).

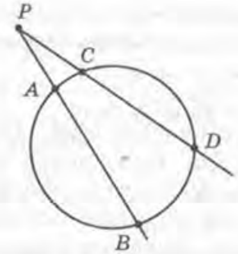


Рис. 173

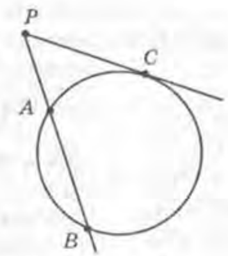


Рис. 174

Кут між хордою й дотичною

Гострий кут між хордою кола й дотичною до кола в кінці хорди дорівнює половині кута між радіусами, проведеними до кінців хорди (рис. 175):

$\angle CBA = \dfrac{1}{2}\angle AOB.$

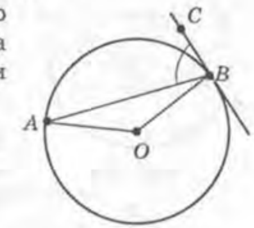


Рис. 175

10. Вписані й описані трикутники

Коло називається ***вписаним у трикутник***, якщо воно дотикається до всіх його сторін.

Центр кола, вписаного в трикутник, є точкою перетину його бісектрис.

У будь-який трикутник можна вписати коло, і до того ж тільки одне.

Центр кола, вписаного в рівнобедрений трикутник, належить медіані, висоті й бісектрисі, проведеним із вершини до основи.

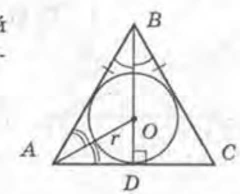


Рис. 176

На рисунку 176:

$\triangle ABC$ — рівнобедрений $(AB = BC)$;

$BD \perp AC$;

$O \in BD$; O — центр вписаного кола,

O — точка перетину бісектрис;

$OD = r$ — радіус вписаного кола.

Коло називається ***описаним навколо трикутника***, якщо воно проходить через усі його вершини.

Центр кола, описаного навколо трикутника, є точкою перетину перпендикулярів до сторін цього трикутника, проведених через середини цих сторін.

Навколо будь-якого трикутника можна описати коло, і до того ж тільки одне.

Центр кола, описаного навколо рівнобедреного трикутника, належить прямій, яка містить медіану, висоту й бісектрису, що проведені з вершини до основи.

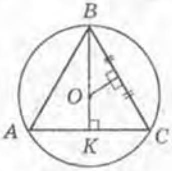


Рис. 177

На рисунку 177:

$\triangle ABC$ — рівнобедрений $(AB = BC)$; $BK \perp AC$; $O \in BK$; O — центр описаного кола, O — точка перетину серединних перпендикулярів $OB = R$ — радіус описаного кола.

Центром кола, описаного навколо прямокутного трикутника, є середина гіпотенузи.

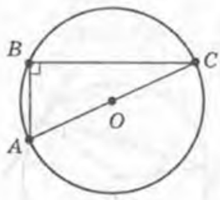


Рис. 178

На рисунку 178:

O — центр описаного навколо прямокутного $\triangle ABC$ кола:

$$AO = OC = \frac{1}{2}AC = R.$$

Центри кіл, описаного навколо рівностороннього трикутника і вписаного в нього, збігаються. Це точка перетину медіан, бісектрис і висот рівностороннього трикутника.

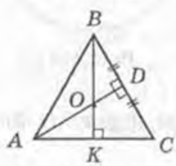


Рис. 179

На рисунку 179:

$\triangle ABC$ — рівносторонній,

O — центр вписаного і описаного кола;

$OB = OA = R$ — радіус описаного кола;

$OK = OD = r$ — радіус вписаного кола.

11. Площа трикутника та круга

Площа трикутника дорівнює половині добутку його сторони на висоту, проведену до цієї сторони.

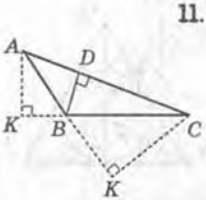


Рис. 180

На рисунку 180:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}BC \cdot AK;$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BD;$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot CK.$$

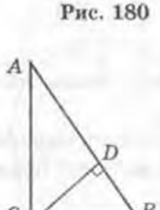


Рис. 181

На рисунку 181:

$\triangle ABC$ — прямокутний;

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BC;$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CD.$$

Площа трикутника дорівнює половині добутку двох будь-яких його сторін на синус кута між ними.

На рисунку 182:

$$S_{\triangle ABC} = bc \cdot \sin\alpha;$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ab \cdot \sin\gamma;$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ac \cdot \sin\beta.$$

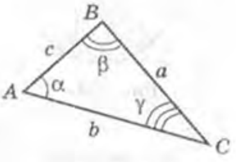


Рис. 182

Якщо $\triangle ABC$ — рівносторонній (рис. 183), $AB = BC = AC = a$, тоді

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} a \cdot a \cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

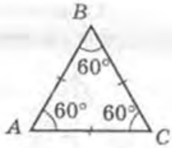


Рис. 183

Формула Герона для площі трикутника

$$S_{\triangle} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

де a, b, c — довжини сторін трикутника,

$$p = \frac{a+b+c}{2}.$$

$$S_{\triangle ABC} = p \cdot r,$$

де r — радіус вписаного кола (рис. 184).

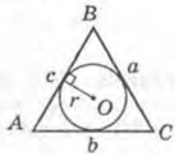


Рис. 184

$$p = \frac{a+b+c}{2}.$$

$S = \dfrac{abc}{4R}$, де R — радіус описаного кола (рис. 185).

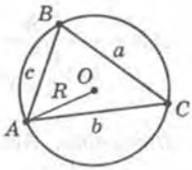


Рис. 185

Площа круга та його частин

$S_{\text{круга}} = \pi R^2$, де R — радіус круга.

$$S_{\text{кругового сектора}} = \frac{\pi R^2}{360} \cdot \alpha \text{ (рис. 186).}$$

$$S_{\text{кругового сегмента}} = \frac{\pi R^2}{360} \cdot \alpha - S_{\triangle AOB} \text{ (рис. 187).}$$

Рис. 186

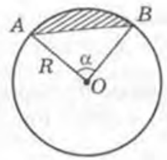


Рис. 187

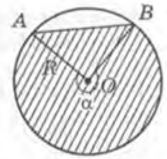


Рис. 188

$$S_{\text{кругового сегмента}} = \frac{\pi R^2}{360}\cdot\alpha + S_{\triangle AOB} \text{ (рис. 188).}$$

Самовчитель

Задача 1. Сума двох нерівних висот рівнобедреного трикутника дорівнює h, а кут при вершині дорівнює α. Знайти бічну сторону трикутника.

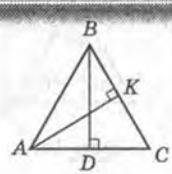


Рис. 189

Розв'язання.

Нехай AK і BD — нерівні висоти трикутника ABC $(AB = BC)$ (рис. 189). За умовою задачі $BD + AK = h$, $\angle ABC = \alpha$.

З прямокутного трикутника ADB знаходимо $BD = AB\cdot\cos\frac{\alpha}{2}$. Із прямокутного трикутника AKB знаходимо $AK = AB\cdot\sin\alpha$. Отже,

$$AB\cdot\cos\frac{\alpha}{2} + AB\cdot\sin\alpha = h;$$

$$AB\cdot\left(\cos\frac{\alpha}{2} + \sin\alpha\right) = h;$$

$$AB = \frac{h}{\cos\frac{\alpha}{2} + \sin\alpha}.$$

Відповідь. $AB = \dfrac{h}{\cos\frac{\alpha}{2} + \sin\alpha}$.

Задача 2. Точка дотику кола, вписаного в прямокутний трикутник, ділить гіпотенузу на відрізки довжиною a і b. Знайти площу трикутника, якщо радіус вписаного кола дорівнює r.

Розв'язання.

За умовою задачі (рис. 190) $AM = a$; $MB = b$. За властивістю дотичних, проведених до кола з однієї точки:

$$AM = AK = a;\quad BM = BN = b.$$

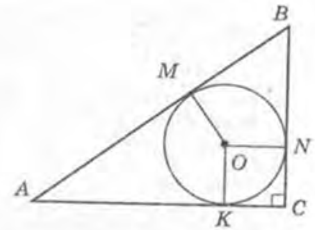


Рис. 190

Оскільки $ONCK$ — квадрат, то $ON = NC = KC = OK = r$.

Тоді

$AC = a + r$; $AB = a + b$;

$BC = b + r$.

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}BC\cdot AC = \frac{(a+r)(b+r)}{2}.$$

Відповідь. $\dfrac{(a+r)(b+r)}{2}$.

Задача 3. У рівнобедрений трикутник із кутом 120° при вершині й бічною стороною, що дорівнює a, вписано коло. Знайти радіус цього кола.

Розв'язання.

I спосіб

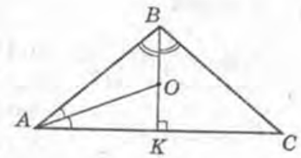


Рис. 191

Нехай $\triangle ABC$ — даний рівнобедрений трикутник (рис. 191), $\angle ABC = 120^\circ$, $AB = BC = a$.

Точка O — центр вписаного кола, тому O — точка перетину бісектрис трикутника.

$$\angle BAC = \angle BCA = \frac{180^\circ - 120^\circ}{2} = 30^\circ$$ (як кути при основі рівнобедреного трикутника).

Отже, $\angle OAK = 15^\circ$.

За теоремою синусів маємо:

$$\frac{AC}{\sin 120^\circ} = \frac{BC}{\sin 30^\circ};$$

$$\frac{AC}{\sin(90^\circ + 30^\circ)} = \frac{a}{\sin 30^\circ};$$

$$\frac{AC}{\cos 30^\circ} = \frac{a}{\sin 30^\circ};$$

$$AC = \frac{a\cdot\cos 30^\circ}{\sin 30^\circ} = 2a\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}.$$

$$AK = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

З прямокутного трикутника OAK знаходимо

$$OK = r = AK\cdot\operatorname{tg}15^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}\cdot\operatorname{tg}15^\circ;$$

$$\operatorname{tg} 15^\circ = \frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ} = \frac{2\sin 15^\circ \cos 15^\circ}{2\cos^2 15^\circ} = \frac{\sin 30^\circ}{2\cos^2 15^\circ} =$$

$$= \frac{1}{4\cos^2 15^\circ} = \frac{1}{4 \cdot \frac{1+\cos 30^\circ}{2}} = \frac{1}{2\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} =$$

$$= \frac{1}{2+\sqrt{3}} = \frac{2-\sqrt{3}}{\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)} = \frac{2-\sqrt{3}}{2^2-\left(\sqrt{3}\right)^2} = 2-\sqrt{3}.$$

Отже, $r = \frac{a\sqrt{3}}{2}\left(2-\sqrt{3}\right)$.

Відповідь. $\frac{a\sqrt{3}\left(2-\sqrt{3}\right)}{2}$.

II спосіб

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin 120^\circ = \frac{1}{2} a^2 \cos 30^\circ = \frac{1}{2} a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

$$S_{\triangle ABC} = p \cdot r = \frac{a+a+a\sqrt{3}}{2} \cdot r = \frac{2a+a\sqrt{3}}{2} \cdot r.$$

Отже, $\frac{2a+a\sqrt{3}}{2} \cdot r = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$;

$$r = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{2}{a\left(2+\sqrt{3}\right)} = \frac{a\sqrt{3}}{2\left(2+\sqrt{3}\right)} = \frac{a\sqrt{3}\left(2-\sqrt{3}\right)}{2\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)} =$$

$$= \frac{a\sqrt{3}\left(2-\sqrt{3}\right)}{2}.$$

Відповідь. $\frac{a\sqrt{3}\left(2-\sqrt{3}\right)}{2}$.

Задача 4. У прямокутному трикутнику бісектриса гострого кута ділить протилежний катет на відрізки, що дорівнюють 4 і 5 см. Визначити площу трикутника.

Рис. 192

Розв'язання.

Нехай $\triangle ABC$ — даний прямокутний трикутник (рис. 192), AD — бісектриса трикутника, $CD = 4$ см, $BD = 5$ см.

За властивістю бісектриси трикутника маємо:

$\frac{CD}{AC} = \frac{BD}{AB}$. Нехай $AC = x$, $AB = y$, тоді

$$\begin{cases} \dfrac{4}{x} = \dfrac{5}{y}, \\ x^2 + 9^2 = y^2 \text{ (за теоремою Піфагора).} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{4y}{5}, \\ \dfrac{16y^2}{25} + 81 = y^2; \end{cases} \quad \begin{cases} x = \dfrac{4y}{5}, \\ \dfrac{9y^2}{25} = 81; \end{cases} \quad \begin{cases} x = \dfrac{4y}{5}, \\ y^2 = \dfrac{81 \cdot 25}{9} = 9 \cdot 25; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{4y}{5}, \\ \left[\begin{array}{l} y = 15, \\ y = -15 \text{ (умові задачі не задовольняє).} \end{array} \right. \end{cases}$$

$$x = \frac{4 \cdot 15}{5} = 12.$$

Отже, $AC = 12$ см.

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 9 = 54 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Відповідь. 54 см^2.

Задача 5. У рівнобедреному трикутнику довжина вписаного кола дорівнює 24π см, а його центр віддалений від вершини трикутника на 20 см. Обчислити периметр трикутника.

Розв'язання.

Нехай $\triangle ABC$ — даний рівнобедрений трикутник $(AB = BC)$ (рис. 193), у який вписано коло довжиною $C = 24\pi$ см.

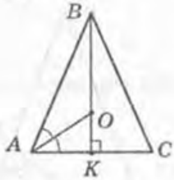


Рис. 193

Оскільки $C = 24\pi$, то $2\pi r = 24\pi$;

$$r = \frac{24\pi}{2\pi} = 12 \text{ (см)}.$$

Точка O як центр вписаного кола є точкою перетину бісектрис трикутника ABC. Отже, AO є бісектрисою $\triangle ABK$.

За властивістю бісектриси трикутника маємо:

$$\frac{BO}{AB} = \frac{OK}{AK} \text{ або } \frac{BO}{OK} = \frac{AB}{AK}.$$

$BO = 20$ см (за умовою задачі);

$OK = r = 12$ см — радіус вписаного кола;

$BK = BO + OK = 20 + 12 = 32$ (см).

Отже, $\frac{AB}{AK} = \frac{20}{12} = \frac{5}{3}$.

Нехай x см в одній частині, тоді $AB = 5x$, $AK = 3x$.

З прямокутного трикутника BKA за теоремою Піфагора маємо:

$AB^2 = AK^2 + BK^2$;

$25x^2 = 9x^2 + 32^2$;

$16x^2 = 1024$;

$x^2 = 64$;

$x = 8$.

Отже, $AB = 5x = 5 \cdot 8 = 40$ (см);

$AK = 3x = 3 \cdot 8 = 24$ (см);

$AC = 2 \cdot AK = 2 \cdot 24 = 48$ (см).

Звідси $P_{\triangle ABC} = 40 + 40 + 48 = 128$ (см).

Відповідь. 128 см.

Задача 6. У рівнобедреному трикутнику кут при основі дорівнює 72°, а бісектриса цього кута дорівнює m. Знайти сторони трикутника.

Розв'язання.

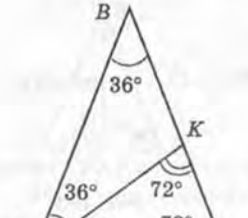


Рис. 194

Нехай $\triangle ABC$ — даний рівнобедрений трикутник $(AB = BC)$ (рис. 194), у якому $\angle A = \angle C = 72°$, AK — бісектриса $\angle A$, $AK = m$.

$\angle B = 180° - (72° + 72°) = 36°$.

Оскільки в $\triangle ABK$ $\angle B = \angle BAK = 36°$, то за ознакою рівнобедреного трикутника $\triangle ABK$ — рівнобедрений $(AK = BK = m)$.

Розглянемо $\triangle ACK$.

$\angle AKC$ — зовнішній кут трикутника ABK при вершині K. За властивістю зовнішнього кута трикутника:

$\angle AKC = \angle BAK + \angle ABK = 36° + 36° = 72°$.

Оскільки в $\triangle AKC : \angle AKC = \angle ACK = 72°$, то за ознакою рівнобедреного трикутника $\triangle ACK$ — рівнобедрений $(AK = AC = m)$.

Нехай $AB = x$, тоді $CK = x - m$.

За властивістю бісектриси трикутника маємо:

$$\frac{BK}{KC} = \frac{AB}{AC};$$

$$\frac{m}{x-m} = \frac{x}{m};$$

$$x(x-m) = m^2; \quad x^2 - mx - m^2 = 0;$$

$$D = (-m)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-m^2) = m^2 + 4m^2 = 5m^2;$$

$$x_1 = \frac{m + \sqrt{5m^2}}{2} = \frac{m + \sqrt{5}m}{2} = \frac{m\left(1+\sqrt{5}\right)}{2};$$

$$x_2 = \frac{m - \sqrt{5}m}{2} = \frac{m\left(1-\sqrt{5}\right)}{2} < 0$$ (умову задачі не задовольняє).

Отже, $BA = BC = \dfrac{m\left(1+\sqrt{5}\right)}{2}$, $AC = m$.

Відповідь. m; $\dfrac{m\left(1+\sqrt{5}\right)}{2}$.

Задача 7. Точка ділить катет прямокутного трикутника у відношенні 1 : 2, рахуючи від вершини гострого кута, і віддалена від гіпотенузи на 2 см. Довжина другого катета 7 см. Обчислити площу трикутника.

Розв'язання.

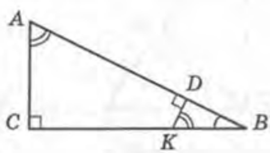


Рис. 195

Нехай $\triangle ABC$ — даний прямокутний трикутник (рис. 195), у якому $AC = 7$ см, $BK : CK = 1 : 2$, $KD \perp AB$, $KD = 2$ см.

Нехай x см в одній частині, тоді $BK = x$ см, $CK = 2x$ см, $BC = x + 2x = 3x$ (см).

Розглянемо $\triangle ACB$ і $\triangle KDB$. У них:

$$\left.\begin{array}{l}\angle C = \angle D = 90^\circ \\ \angle B - \text{спільний}\end{array}\right\} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle KDB$$ (за двома кутами).

Отже, $\dfrac{KD}{AC} = \dfrac{BD}{CB}$.

З прямокутного $\triangle KDB$ за наслідком із теореми Піфагора знаходимо BD.

$BD = \sqrt{x^2 - 4}$. Тоді $\dfrac{2}{7} = \dfrac{\sqrt{x^2-4}}{3x}$; $7\sqrt{x^2-4} = 6x$;

$49(x^2-4)=36x^2;\ \ 49x^2-36x^2=196;\ \ 13x^2=196;$

$x^2=\frac{196}{13};$

$$\left[\begin{array}{l} x=\frac{14}{\sqrt{13}}, \\ x=-\frac{14}{\sqrt{13}}, \text{ (умові задачі не задовольняє).} \end{array}\right.$$

Отже, $BK=\frac{14}{\sqrt{13}};\ \ BC=3x=3\cdot\frac{14}{\sqrt{13}}=\frac{42}{\sqrt{13}}.$

$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot BC=\frac{1}{2}\cdot 7\cdot\frac{42}{\sqrt{13}}=\frac{147}{\sqrt{13}}$ (см²).

Відповідь. $\frac{147}{\sqrt{13}}$ см².

Задача 8. Периметр прямокутного трикутника дорівнює 60 см. Знайти його сторони, якщо висота, проведена до гіпотенузи, дорівнює 12 см.

Рис. 196

Розв'язання.

Нехай $\triangle ABC$ — даний прямокутний трикутник (рис. 196), у якому $CD\perp AB$, $CD=12$ см;

$P_{\triangle ABC}=60$ см.

Нехай $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$, тоді:

$$\begin{cases} a+b+c=60, \\ a^2+b^2=c^2, \quad \text{(за теоремою Піфагора).} \\ \frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}\cdot 12c, \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a+b+c)^2=60^2, \\ a^2+b^2=c^2; \\ ab=12c; \end{cases}$$

$a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac=3600;$

$a^2+b^2+c^2+2(ab+c(a+b))=3600;$

$c^2+c^2+2(12c+c(60-c))=3600;$

$2c^2+24c+120c-2c^2=3600;$

$144c = 3600; \ c = 3600 : 144; \ c = 25.$

$\begin{cases} a + b = 35, \\ ab = 300; \end{cases} \begin{cases} a = 35 - b, \\ b(35 - b) = 300; \end{cases}$

$b^2 - 35b + 300 = 0;$

$b_1 = 15; \ b_2 = 20,$

$a_1 = 35 - 15 = 20; \ a_2 = 35 - 20 = 15.$

Відповідь. 15 см, 20 см, 25 см.

Задача 9. У рівнобедреному трикутнику основа дорівнює 48 см, а бічна сторона — 30 см. Знайти радіуси вписаного і описаного кола, відстань між їх центрами.

Розв'язання.

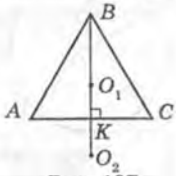


Рис. 197

Нехай $\triangle ABC$ — даний рівнобедрений трикутник (рис. 197), у якому $AC = 48$ см, $BA = BC = 30$ см.

Із прямокутного трикутника AKB за наслідком із теореми Піфагора маємо:

$BK = \sqrt{AB^2 - AK^2} = \sqrt{30^2 - 24^2} = \sqrt{(30 - 24)(30 + 24)} =$

$= \sqrt{6 \cdot 54} = \sqrt{6 \cdot 6 \cdot 9} = 3 \cdot 6 = 18$ (см);

$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BK = p \cdot r$, де $r = O_1K$ — радіус вписаного кола,

$p = \frac{AB + BC + AC}{2} = \frac{30 + 30 + 48}{2} = 54$ (см).

Отже, $\frac{1}{2} \cdot 48 \cdot 18 = 54 \cdot r; \ r = \frac{48 \cdot \cancel{9}^{1}}{\cancel{54}_{6}} = 8$ (см).

Центр O_1 вписаного кола розміщений у точці перетину бісектрис, тобто на висоті BK.

$\sin \angle A = \frac{BK}{AB} = \frac{18}{30} = \frac{3}{5}.$

За наслідком із теореми синусів маємо:

$\frac{BC}{\sin \angle A} = 2R$, де R — радіус описаного кола;

$\frac{30}{\frac{3}{5}} = 2R; \ \frac{150}{3} = 2R; \ 50 = 2R;$

$R = \frac{50}{2} = 25$ (см).

Центр O_2 описаного кола розміщений у точці перетину серединних перпендикулярів, тобто на висоті BK або на її продовженні. Оскільки $R > BK$, то O_2 розміщено на продовженні BK. Тому

$$O_1O_2 = R - BO_1 = 25 - (18 - 8) = 25 - 10 = 15 \text{ (см)}.$$

Відповідь. 8 см; 25 см; 15 см.

Задача 10. Відрізки дотичної й січної, що виходять з однієї точки, дорівнюють 20 см і 40 см відповідно. Січна віддалена від центра на 8 см. Знайти площу круга.

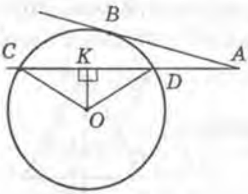


Рис. 198

Розв'язання.

За умовою задачі (рис. 198)

$AB = 20$ см,

$AC = 40$ см,

$OK \perp AC$, $OK = 8$ см.

$AB^2 = AC \cdot AD;$

$20^2 = 40 \cdot AD;$

$$AD = \frac{400}{40} = 10 \text{ (см)}.$$

Отже, $CD = 40 - 10 = 30$ (см).

Оскільки $\triangle COD$ — рівнобедрений $(CO = OD = R)$, то OK — висота і медіана.

Звідси $KD = \dfrac{30}{2} = 15$ (см).

Із прямокутного трикутника OKD за теоремою Піфагора маємо:

$OD^2 = OK^2 + KD^2;$

$$OD = \sqrt{8^2 + 15^2} = \sqrt{64 + 225} = \sqrt{289} = 17 \text{ (см)}.$$

$$S_{\text{круга}} = \pi R^2 = \pi \cdot 17^2 = 289\pi \text{ (см}^2).$$

Відповідь. 289π см^2.

Задача 11. Периметри подібних трикутників відносяться як 5 : 7, а сума їх площ дорівнює 296 см^2. Знайти площі трикутників.

Розв'язання.

Нехай P_1, P_2 — периметри двох подібних трикутників; S_1, S_2 — їх площі:

$\dfrac{P_1}{P_2} = \dfrac{5}{7} = k$, де k — коефіцієнт подібності.

$$\begin{cases} \dfrac{S_1}{S_2} = k^2 = \dfrac{25}{49}, \\ S_1 + S_2 = 296; \end{cases}$$

$S_1 = 296 - S_2;\quad \dfrac{296 - S_2}{S_2} = \dfrac{25}{49};$

$25S_2 = 49(296 - S_2),$

$25S_2 = 14504 - 49S_2;$

$74S_2 = 14504;$

$S_2 = 14504 : 74;$

$S_2 = 196;$

$S_1 = 296 - 196 = 100$ (см^2).

Відповідь. 100 см^2; 196 см^2.

Задачі для самостійного розв'язування

Перевір себе

1. У прямокутному трикутнику точка дотику вписаного кола ділить гіпотенузу на відрізки, що дорівнюють 5 і 12 см. Знайти катети трикутника.

2. У рівнобедреному трикутнику основа дорівнює 16 см, а більша сторона дорівнює 10 см. Знайти радіуси вписаного й описаного кіл і відстань між їхніми центрами.

3. Хорда кола дорівнює 10 см. Через один кінець хорди проведено дотичну до кола, а через другий — січну, паралельну дотичній. Визначити радіус кола, якщо внутрішній відрізок січної дорівнює 12 см.

4. Катети прямокутного трикутника дорівнюють a і b. Знайти бісектрису прямого кута.

5. Знайти периметр рівнобедреного трикутника, у якому висота, проведена до основи, дорівнює 5 см, а площа трикутника — 60 см^2.

6. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 30 см, а висота, проведена до основи, — 20 см. Знайти висоту трикутника, проведену до бічної сторони.

7. Вписане в прямокутний трикутник коло дотикається гіпотенузи в точці, що ділить гіпотенузу на відрізки довжиною 2 см і 3 см. Знайти радіус кола.

8. Знайти площу трикутника, якщо його основа дорівнює a, а кути при основі 30° і 45°.

9. У рівнобедреному трикутнику висота, проведена до основи, дорівнює 20 см, а основа відноситься до бічної сторони як 4 : 3. Знайти радіус вписаного кола.

10. Знайти площу прямокутного трикутника, якщо висота, опущена на гіпотенузу, ділить її на відрізки довжиною 8 см і 2 см.

11. Знайти площу прямокутного трикутника, якщо радіус кола, описаного навколо нього, дорівнює 5 см, а відношення катетів 3 : 4.

12. У прямокутному трикутнику бісектриса прямого кута ділить гіпотенузу на відрізки довжиною 15 см і 20 см. Знайти площу трикутника.

13. Катет і гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнюють 10 см і 26 см. Знайти площу круга відповідно, вписаного в трикутник.

14. У рівнобедреному трикутнику бічна сторона дорівнює 5 см, а косинус кута при основі дорівнює 0,6. Знайти радіус вписаного кола.

15. Знайти радіус кола, описаного навколо прямокутного трикутника, якщо радіус кола, вписаного в цей трикутник, дорівнює 3 см, а катет дорівнює 10 см.

16. Радіуси вписаного й описаного кіл прямокутного трикутника дорівнюють 2 і 5 см відповідно. Знайти катети трикутника.

17. Знайти відношення радіуса кола, вписаного в рівнобедрений прямокутний трикутник, до висоти, опущеної з вершини прямого кута на гіпотенузу.

18. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 6 і 8 см. Знайти відстань від центра вписаного в трикутник кола до центра описаного навколо нього кола.

19. У коло радіуса R вписано трикутник, кути якого дорівнюють 15° і 60°. Знайти площу трикутника.

20. Площа прямокутного трикутника дорівнює $2\sqrt{3}$ см². Визначити його висоту, проведену до гіпотенузи, якщо вона ділить прямий кут у відношенні 1 : 2.

21. Знайти площу круга, у який вписано прямокутний трикутник, якщо периметр цього трикутника дорівнює 24 см, а його площа 24 см².

22. Висота, проведена до основи рівнобедреного трикутника, дорівнює 25 см, а радіус вписаного кола дорівнює 8 см. Знайти основу трикутника.

23. У рівнобедреному трикутнику центр вписаного кола ділить висоту у відношенні 12 : 5, а бічна сторона дорівнює 60 см. Знайти основу трикутника.

24. У рівнобедреному трикутнику висота, проведена до основи, дорівнює 3 см, а висота, опущена на бічну сторону, — 4 см. Знайти периметр трикутника.

25. До кола з радіусом 36 см проведено дотичну з точки, віддаленої від центра на 85 см. Знайти довжину відрізка дотичної.

26. Із спільної точки до кола проведені дві дотичні. Радіус кола дорівнює 11 см, а сума довжин відрізків дотичних — 120 см. Знайти відстань від центра кола до даної точки.

27. Із спільної точки до кола проведені дотична та січна. Знайти довжину відрізка дотичної, якщо вона на 5 см більша зовнішнього відрізка січної і на стільки ж менша від внутрішнього відрізка.

28. У рівнобедрений трикутник із кутом α при основі вписано коло з радіусом r. Знайти радіус описаного кола.

29. Навколо кола з радіусом r описано рівнобедрений трикутник із кутом α при вершині. Знайти його сторони.

30. Навколо рівнобедреного трикутника з кутом 2α при вершині описано коло з радіусом R. Знайти периметр трикутника.

31. Знайти площу прямокутного трикутника, якщо дано радіуси R і r описаного навколо нього і вписаного в нього кіл.

32. Площа прямокутного трикутника дорівнює 24 см^2, а гіпотенуза дорівнює 10 см. Знайти радіус вписаного кола.

33. Периметр прямокутного трикутника дорівнює 12 см, а його площа — 6 см^2. Знайти довжини сторін трикутника.

34. У прямокутному трикутнику бісектриса гострого кута ділить катет на відрізки m і n $(m > n)$. Знайти сторони трикутника.

35. У прямокутному трикутнику гострі кути відносяться як 1 : 2. Більший катет дорівнює $4\sqrt{3}$ см. Знайти площу круга, описаного навколо даного трикутника.

36. Бісектриса прямого кута ділить гіпотенузу прямокутного трикутника на відрізки довжиною $2\frac{1}{7}$ м і $2\frac{6}{7}$ м. Знайти катети трикутника.

37. AB — діаметр круга; BC — відрізок дотичної; D — точка перетину прямої AC із колом.
Знайти площу круга, якщо $AD = 32$ см, $DC = 18$ см.

§ 2. Чотирикутники

Це треба знати!

1. Паралельні прямі

Дві прямі на площині називаються ***паралельними***, якщо вони не перетинаються.

Два відрізки називаються ***паралельними***, якщо вони лежать на паралельних прямих.

Пряма c називається ***січною*** відносно прямих a і b, якщо вона перетинає їх у двох точках. При перетині прямих a і b січною c утворюється вісім кутів (рис. 199):

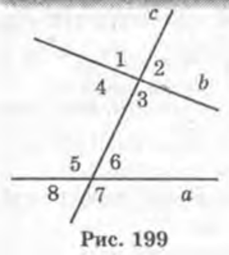


Рис. 199

— внутрішні різносторонні кути: 3 і 5; 4 і 6;
— внутрішні односторонні кути: 4 і 5; 3 і 6;
— відповідні кути: 1 і 5; 4 і 8; 2 і 6; 3 і 7.

Ознаки та властивості паралельності двох прямих

1) $\angle 1$ і $\angle 2$ — внутрішні різносторонні кути при перетині прямих a і b січною c;
$\angle 1 = \angle 2$ (рис. 200) $\Rightarrow a \parallel b$.

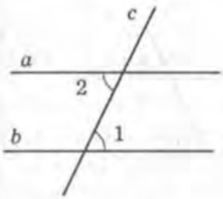


Рис. 200

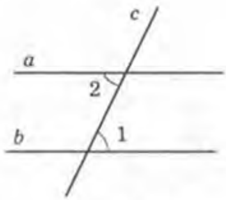


Рис. 201

Якщо при перетині двох прямих січною внутрішні різносторонні кути рівні, то прямі паралельні.

2) $a \parallel b$;
$\angle 1$ і $\angle 2$ — внутрішні різносторонні кути при перетині прямих a і b січною c (рис. 201) $\Rightarrow \angle 1 = \angle 2$.
Якщо дві паралельні прямі перетнуті січною, то внутрішні різносторонні кути рівні.

3) $\angle 3$ і $\angle 4$ — внутрішні односторонні кути при перетині прямих a і b січною c:
$\angle 3 + \angle 4 = 180°$ (рис. 202) $\Rightarrow a \parallel b$.
Якщо при перетині двох прямих січною сума внутрішніх односторонніх кутів дорівнює 180°, то прямі паралельні.

4) $a \parallel b$,
$\angle 3$ і $\angle 4$ — внутрішні односторонні кути при перетині прямих a і b січною c (рис. 203) $\Rightarrow \angle 3 + \angle 4 = 180°$.
Якщо дві паралельні прямі перетнуті січною, то сума внутрішніх односторонніх кутів дорівнює 180°.

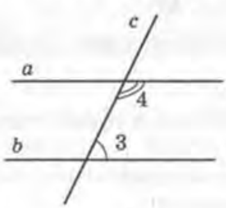


Рис. 202

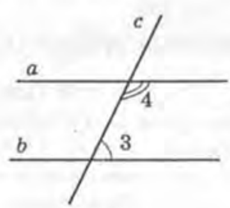


Рис. 203

5) $\angle 5$ і $\angle 6$ — відповідні кути при перетині прямих a і b січною c, $\angle 5 = \angle 6$ (рис. 204) $\Rightarrow a \parallel b$.

Якщо при перетині двох прямих січною відповідні кути рівні, то прямі паралельні.

6) $a \parallel b$, $\angle 5$ і $\angle 6$ — відповідні кути при перетині прямих a і b січною c (рис. 205) $\Rightarrow \angle 5 = \angle 6$.

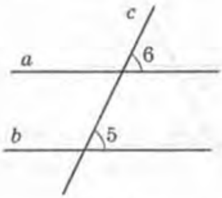


Рис. 204

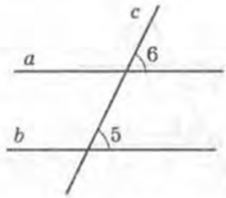


Рис. 205

Якщо дві паралельні прямі перетнуті січною, то відповідні кути рівні.

7) (рис. 206) $\left.\begin{matrix} a \perp c, \\ b \perp c, \end{matrix}\right\} \Rightarrow a \parallel b.$

Дві прямі, перпендикулярні до третьої прямої, паралельні.

8) $\left.\begin{matrix} a \parallel b, \\ c \perp a, \end{matrix}\right\} \Rightarrow c \perp b.$

Якщо пряма перпендикулярна до однієї з паралельних прямих, то вона перпендикулярна й до другої (рис. 207).

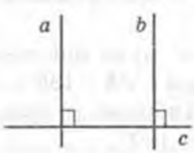


Рис. 206

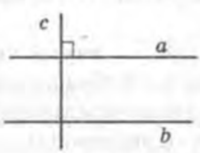


Рис. 207

2. Паралелограм

Паралелограм — це чотирикутник, у якого протилежні сторони паралельні.

Властивості паралелограма

1) Якщо $ABCD$ — паралелограм (рис. 208), то:

$\angle A = \angle C$; $\angle B = \angle D$;

$BA = CD$; $BC = AD$.

У паралелограма протилежні сторони рівні й протилежні кути рівні.

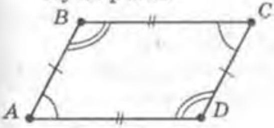


Рис. 208

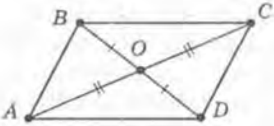


Рис. 209

2) Якщо $ABCD$ — паралелограм (рис. 209), то $AO = OC$; $BO = OD$.
Діагоналі паралелограма точкою перетину діляться пополам.

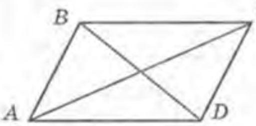


Рис. 210

3) Якщо $ABCD$ — паралелограм (рис. 210), то
$AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + BC^2)$.
Сума квадратів діагоналей паралелограма дорівнює сумі квадратів чотирьох сторін.

Ознаки паралелограма

1) $\left.\begin{matrix} AB \parallel CD, \\ AB = CD, \end{matrix}\right\} \Rightarrow ABCD$ — паралелограм (рис. 211).

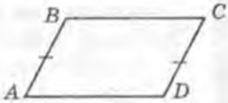


Рис. 211

Якщо в чотирикутнику дві сторони рівні і паралельні, то цей чотирикутник — паралелограм.

2) $\left.\begin{matrix} AB = CD, \\ BC = AD, \end{matrix}\right\} \Rightarrow ABCD$ — паралелограм (рис. 212).

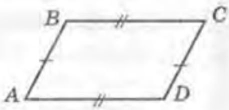


Рис. 212

Якщо в чотирикутнику протилежні сторони попарно рівні, то цей чотирикутник — паралелограм.

3) $\left.\begin{matrix} AO = OC, \\ BO = OD, \end{matrix}\right\} \Rightarrow ABCD$ — паралелограм (рис. 213).

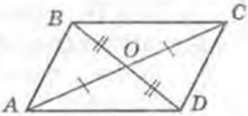


Рис. 213

Якщо в чотирикутнику діагоналі перетинаються й точкою перетину діляться навпіл, то цей чотирикутник — паралелограм.

Площа паралелограма

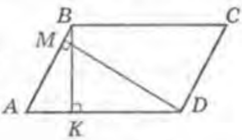


Рис. 214

1) Площа паралелограма дорівнює добутку його сторони на висоту, проведену до цієї сторони (рис. 214):
$S_{ABCD} = AD \cdot BK$; $S_{ABCD} = AB \cdot DM$.

2) Площа паралелограма дорівнює добутку двох його сусідніх сторін на синус кута між ними (рис. 215):

$S_{ABCD} = AB \cdot AD \cdot \sin\alpha;$

$S_{ABCD} = AB \cdot BC \cdot \sin(180^\circ - \alpha) = AB \cdot BC \cdot \sin\alpha.$

3) Площа паралелограма дорівнює половині добутку діагоналей на синус кута між ними (рис. 216):

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin\alpha.$$

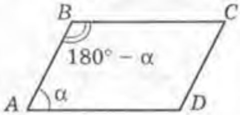


Рис. 215

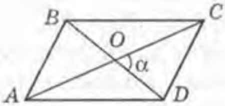


Рис. 216

3. Ромб

Ромб — це паралелограм, у якого всі сторони рівні.

Властивості ромба

1) Оскільки ромб є паралелограмом, то він має всі властивості паралелограма.
2) Якщо $ABCD$ — ромб (рис. 217), то $BD \perp AC$;
BD — бісектриса $\angle ABC$; DB — бісектриса $\angle ADC$;
AC — бісектриса $\angle BAD$; CA — бісектриса $\angle BCD$.
Діагоналі ромба перетинаються під прямим кутом. Діагоналі ромба є бісектрисами його кутів.

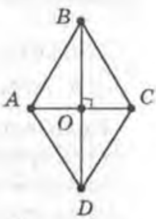


Рис. 217

Ознаки ромба

1) $ABCD$ — паралелограм:
$AC \perp BD \Rightarrow ABCD$ — ромб (рис. 218).
Якщо в паралелограмі діагоналі перпендикулярні, то він є ромбом.
2) $ABCD$ — паралелограм; AC — бісектриса $\angle A$;
CA — бісектриса $\angle C \Rightarrow ABCD$ — ромб (рис. 219)

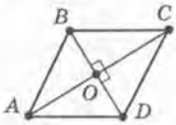


Рис. 218

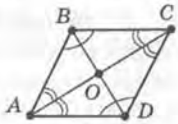


Рис. 219

Якщо діагональ паралелограма є бісектрисою його кутів, то він є ромбом.

3) $ABCD$ — чотирикутник;
$AB = BC = CD = AD \Rightarrow ABCD$ — ромб (рис. 220).
Якщо в чотирикутнику всі сторони рівні, то він є ромбом.

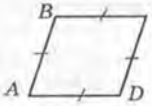


Рис. 220

Площа ромба

$S_{ABCD} = BC \cdot AK = \frac{1}{2} AC \cdot BD$ (рис. 221).

Нехай $AB = BC = CD = AD = a$,

тоді $S_{ABCD} = a^2 \cdot \sin \angle B$.

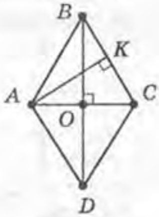


Рис. 221

4. Прямокутник. Квадрат

Прямокутник — це паралелограм, у якого всі кути прямі.

Властивості прямокутника

1) Оскільки прямокутник є паралелограмом, то він має всі властивості паралелограма.
2) Якщо $ABCD$ — прямокутник, то $BD = AC$ (рис. 222).
Діагоналі прямокутника рівні.

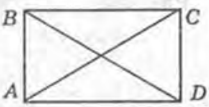


Рис. 222

Ознаки прямокутника

1) $ABCD$ — паралелограм;
$\angle A = 90^\circ \Rightarrow ABCD$ — прямокутник (рис. 223).
Якщо у паралелограма хоча б один кут прямий, то він — прямокутник.

Рис. 223

2) $ABCD$ — паралелограм;
$AC = BD$ (рис. 224) $\Rightarrow ABCD$ — прямокутник.
Якщо в паралелограмі діагоналі рівні, то він — прямокутник.

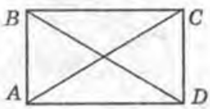


Рис. 224

Площа прямокутника

Нехай $AB = a$, $BC = b$, $AC = BD = d$ (рис. 225), тоді $S_{ABCD} = a \cdot b = \frac{1}{2} d^2 \sin \alpha$.

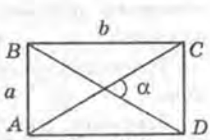


Рис. 225

Квадрат — це прямокутник, у якого всі сторони рівні.

Властивості квадрата

1) У квадрата всі кути прямі.
2) Діагоналі квадрата рівні.
3) Діагоналі квадрата перетинаються під прямим кутом і є бісектрисами його кутів.

Ознака квадрата

Рис. 226

$ABCD$ — прямокутник;

$AC \perp BD \Rightarrow ABCD$ — квадрат (рис. 226).

Якщо діагоналі прямокутника перетинаються під прямим кутом, то він є квадратом.

Площа квадрата

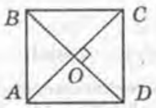


Рис. 227

Нехай $AB = BC = CD = AD = a$,

$BD = AC = d$ (рис. 227),

тоді $S_{ABCD} = a^2 = \frac{1}{2}d^2$.

5. Трапеція

Теорема Фалеса

Паралельні прямі, які перетинають дві дані прямі й відтинають на одній прямій рівні відрізки, відтинають рівні відрізки й на другій прямій (рис. 228).

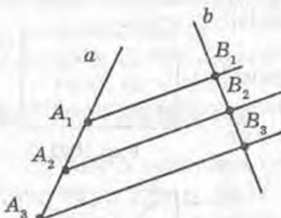


Рис. 228

$$\left.\begin{array}{l} A_1 \in a;\ A_2 \in a;\ A_3 \in a; \\ A_1A_2 = A_2A_3; \\ A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3; \\ B_1 \in b;\ B_2 \in b;\ B_3 \in b; \end{array}\right\} \Rightarrow B_1B_2 = B_2B_3.$$

Трапецією називається чотирикутник, у якого тільки дві протилежні сторони паралельні. Ці паралельні сторони називаються ***основами трапеції***. Дві інші сторони називаються ***бічними сторонами***.

Трапеція, у якої бічні сторони рівні, називається ***рівнобічною***.

Відрізок, який сполучає середини бічних сторін трапеції, називається ***середньою лінією трапеції***.

Властивість середньої лінії трапеції

$ABCD$ — трапеція;

MN — середня лінія трапеції $ABCD \Rightarrow MN \parallel AD$; (рис. 229).

$MN = \frac{1}{2}(BC + AD)$.

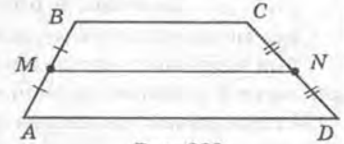


Рис. 229

Середня лінія трапеції паралельна основам і дорівнює їх півсумі.

Властивості рівнобічної трапеції

1) $\left.\begin{array}{l} ABCD \text{ — трапеція;} \\ BC \parallel AD;\ AB = CD \end{array}\right\} \Rightarrow \angle A = \angle D$ (рис. 230).

У рівнобічній трапеції кути при основі рівні.

2) $\left.\begin{array}{l} ABCD \text{ — трапеція;} \\ BC \parallel AD;\ AB = CD \end{array}\right\} \Rightarrow AC = BD$ (рис. 231).

У рівнобічній трапеції діагоналі рівні.

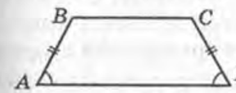


Рис. 230

Рис. 231

Ознаки рівнобічної трапеції

1) $\left.\begin{array}{l} ABCD \text{ — трапеція;} \\ BC \parallel AD;\ \angle A = \angle D \end{array}\right\} \Rightarrow AB = CD$ (рис. 232).

Якщо в трапеції кути при основі рівні, то вона рівнобічна.

2) $\left.\begin{array}{l} ABCD \text{ — трапеція;} \\ BC \parallel AD;\ AC = BD \end{array}\right\} \Rightarrow AB = CD$ (рис. 233).

Якщо в трапеції діагоналі рівні, то вона рівнобічна.

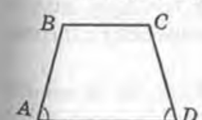


Рис. 232

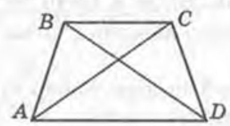


Рис. 233

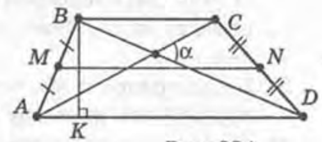


Рис. 234

Площа трапеції

MN — середня лінія трапеції $ABCD$; $BK \perp AD$.

$$S_{ABCD} = \frac{BC + AD}{2} \cdot BK = MN \cdot BK = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin\alpha \text{ (рис. 234).}$$

6. Многокутники. Вписані й описані многокутники

Сума внутрішніх кутів опуклого n-кутника дорівнює $180° \cdot (n-2)$.

Сума зовнішніх кутів опуклого n-кутника, узятих по одному при кожній вершині, дорівнює 360°.

Многокутник називається ***вписаним у коло***, якщо всі його вершини лежать на деякому колі.

Многокутник називається ***описаним навколо кола***, якщо всі його сторони дотикаються до деякого кола.

Опуклий многокутник називається ***правильним***, якщо в нього всі сторони рівні й усі кути рівні.

Правильний многокутник є вписаним у коло і описаним навколо кола. Ці кола мають один і той самий центр, який називається ***центром многокутника***.

$R = \dfrac{a_n}{2\sin\dfrac{180°}{n}}$ — радіус кола, описаного навколо правильного n-кутника;

$r = \dfrac{a_n}{2\operatorname{tg}\dfrac{180°}{n}}$ — радіус кола, вписаного в правильний n-кутник.

Вписані й описані чотирикутники

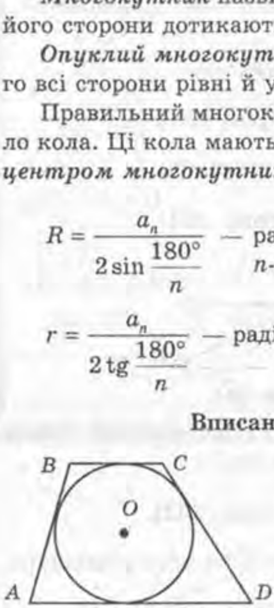


Рис. 235

1) У чотирикутника, описаного навколо кола, суми довжин протилежних сторін рівні:
$BA + CD = BC + AD$ (рис. 235).
2) Якщо в опуклому чотирикутнику суми довжин протилежних сторін рівні між собою, то в нього можна вписати коло.
Із усіх паралелограмів лише в ромб та в квадрат можна вписати коло. Центр його лежить у точці перетину діагоналей.
3) Якщо трапеція або ромб описані навколо кола, то їх висоти дорівнюють діаметру кола.
4) Навколо чотирикутника можна описати коло лише в тому випадку, якщо сума протилежних кутів дорівнює 180°.
Із усіх паралелограмів лише навколо прямокутника та квадрата можна описати коло. Центр його лежить у точці перетину діагоналей.
Навколо трапеції можна описати коло тільки тоді, коли вона рівнобічна.

5) **Теорема Птолемея**

В опуклому чотирикутнику, вписаному в коло, добуток діагоналей дорівнює сумі добутків протилежних сторін:
$AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC$ (рис. 236).

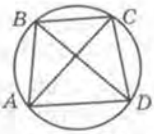


Рис. 236

7. Площі многокутників

1) $S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin\alpha$ (рис. 237).

Якщо діагоналі чотирикутника перетинаються, то площа чотирикутника дорівнює половині добутку його діагоналей на синус кута між ними.

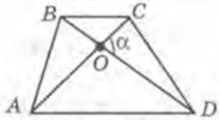


Рис. 237

2) Площа многокутника, описаного навколо кола, дорівнює половині добутку периметра многокутника на радіус вписаного кола;

$S = p \cdot r$, де p — півпериметр.

3) Площі подібних фігур відносяться як квадрати їх відповідних лінійних розмірів.

Задача 1. Знайти площу прямокутної трапеції із гострим кутом α і радіусом r вписаного кола.

Самовчитель

Розв'язання.

Нехай $ABCD$ — дана прямокутна трапеція (рис. 238); $\angle DCK = \alpha$; $AB = DK = 2r$.

За властивістю описаного чотирикутника $AB + CD = BC + AD$;

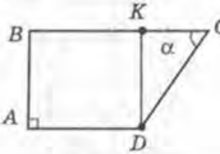


Рис. 238

$$S = \frac{BC + AD}{2} \cdot DK = \frac{AB + CD}{2} \cdot DK;$$

Із прямокутного трикутника DKC: $CD = \frac{DK}{\sin\alpha} = \frac{2r}{\sin\alpha}$.

Отже, $S = \dfrac{2r + \dfrac{2r}{\sin\alpha}}{2} \cdot 2r = \dfrac{2r(2r\sin\alpha + 2r)}{2\sin\alpha} = \dfrac{2r^2(1 + \sin\alpha)}{\sin\alpha}$.

Відповідь. $\dfrac{2r^2(1 + \sin\alpha)}{\sin\alpha}$.

Задача 2. Периметр паралелограма дорівнює 60 см. Знайти його площу, якщо сторони паралелограма відносяться як 2 : 3, а гострий кут дорівнює 30°.

$$\left.\begin{aligned} BM \perp AD,\\ OK \perp AD, \end{aligned}\right\} \Rightarrow BM \parallel OK;$$

$$\left.\begin{aligned} BM \parallel OK,\\ BO = OD,\\ B \in BD,\\ O \in BD,\\ M \in AD,\\ K \in AD, \end{aligned}\right\} \Rightarrow MK = KD \text{ (за теоремою Фалеса).}$$

Отже, $KD = \frac{1}{2}MD = \frac{1}{2}(x+11)$.

$$AK = AD - KD = 2x + 11 - \frac{1}{2}(x+11) = \frac{3}{2}x + \frac{11}{2} = \frac{1}{2}(3x+11).$$

Оскільки діагоналі ромба перетинаються під прямим кутом, то $\angle AOD = 90°$. Отже, $OK^2 = AK \cdot KD$;

$$12^2 = \frac{1}{2}(3x+11)\cdot\frac{1}{2}(x+11);\ 144 = \frac{1}{4}(3x^2 + 33x + 11x + 121);$$

$$3x^2 + 44x + 121 = 576;\ 3x^2 + 44x - 455 = 0;$$

$$D = 44^2 - 4\cdot 3\cdot(-455) = 1936 + 5460 = 7396;$$

$$x_1 = \frac{-44+86}{6} = \frac{42}{6} = 7;$$

$$x_2 = \frac{-44-86}{6} = -\frac{130}{6} = -\frac{65}{3} < 0 \text{ (умові задачі не задовольняє).}$$

$AD = 2x + 11 = 2\cdot 7 + 11 = 25$ (см).

$P_{ABCD} = 4\cdot 25 = 100$ (см).

Відповідь. 100 см.

Задача 9. Обчислити площу рівнобічної трапеції, основи якої дорівнюють 12 см і 18 см, а діагоналі взаємно перпендикулярні.

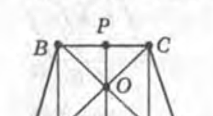


Рис. 246

Розв'язання.

Нехай $ABCD$ — дана трапеція (рис. 246), у якій $BC \parallel AD$, $AB = CD$, $BC = 12$ см, $AD = 18$ см, $BD \perp AC$.

PQ — вісь симетрії рівнобічної трапеції $ABCD$. Отже,

$$\angle AOQ = \angle QAO = \angle QOD = \angle QDO = 45°.$$

Звідси $\triangle AOQ$ і $\triangle OQD$ — рівнобедрені.

$AQ = QD = OQ = 9$ см.

Аналогічно, $BP = PC = PO = 6$ см.

$PQ = PO + OQ = 9 + 6 = 15$ (см).

Оскільки діагоналі даної рівнобічної трапеції взаємно перпендикулярні, то $S = PQ^2 = 15^2 = 225$ (см^2).

Відповідь. 225 см^2.

Задача 10. Знайти кількість сторін опуклого многокутника, у якого сума внутрішніх кутів на 1080° більша за суму зовнішніх.

Розв'язання.

Сума внутрішніх кутів опуклого n-кутника дорівнює $180° \cdot (n - 2)$, а сума зовнішніх кутів опуклого n-кутника дорівнює 360°.

Отже, $180(n - 2) > 360$ (на 1080);

$180(n - 2) = 360 + 1080$; $180n - 360 = 360 + 1080$; $180n = 1800$; $n = 1800 : 180$; $n = 10$.

Відповідь. 10.

Задачі для самостійного розв'язування

Перевір себе

1. Знайти площу рівнобічної трапеції, основи якої дорівнюють 10 см і 6 см, а кут між більшою основою і бічною стороною дорівнює 60°.

2. У рівнобічній трапеції менша основа дорівнює бічній стороні і дорівнює a, а гострий кут дорівнює α. Знайти площу трапеції.

3. Середня лінія рівнобічної трапеції, описаної навколо кола, дорівнює 68 см. Знайти радіус кола, якщо нижня основа трапеції більша від верхньої на 64 см.

4. Діагоналі ромба дорівнюють 14 см і 48 см. Знайти його висоту.

5. Діагоналі паралелограма дорівнюють 17 см і 19 см, а сторони відносяться як 2 : 3. Знайти сторони паралелограма.

6. Знайти висоту паралелограма, у якого основа дорівнює 51 см, а діагоналі — 40 см і 74 см.

7. Навколо круга з радіусом R описана рівнобічна трапеція, із гострим кутом α при основі. Знайти периметр трапеції.

8. Висота ромба дорівнює 12 см, а одна з його діагоналей — 15 см. Знайти площу ромба.

9. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 9 см і 21 см, а висота — 8 см. Знайти радіус кола, описаного навколо трапеції.

10. Діагональ прямокутника d ділить кут прямокутника у відношенні $m : n$. Знайти периметр прямокутника.

11. У ромб, який ділиться своєю діагоналлю на два рівносторонніх трикутники, вписано коло радіусом 2 см. Знайти сторону ромба.

12. Периметр паралелограма дорівнює 90 см, а гострий кут дорівнює 60°. Діагональ паралелограма ділить його тупий кут на частини у відношенні 1 : 3. Знайти сторони паралелограма.

13. Діагональ прямокутної трапеції та її бічна сторона рівні між собою. Знайти середню лінію, якщо висота трапеції дорівнює 2 см, а бічна сторона — 4 см.

14. Площа рівнобічної трапеції, описаної навколо кола, дорівнює S, а висота трапеції у два рази менша бічної сторони. Визначити радіус кола.

15. Діагональ рівнобічної трапеції ділить її тупий кут навпіл. Менша основа трапеції дорівнює 3 см, периметр дорівнює 42 см. Знайти площу трапеції.

16. У рівнобічній трапеції одна основа дорівнює 40 см, а інша 24 см. Діагоналі цієї трапеції взаємно перпендикулярні. Знайти її площу.

17. Визначити бічні сторони рівнобічної трапеції, якщо її основи й площа дорівнюють 8 см^2, 14 см^2 і 44 см^2 відповідно.

18. Обчислити площу трапеції, паралельні сторони якої дорівнюють 16 і 44 см, а непаралельні — 17 і 25 см.

19. Знайти площу трапеції, описаної навколо круга, якщо різниця основ дорівнює 14 см, а бічні сторони — 13 см і 15 см.

20. У трапеції, площа якої 161 см^2, висота 7 см, а різниця паралельних сторін 11 см, знайти довжину більшої основи.

21. Сторона ромба дорівнює 4 см, а площа вписаного в нього круга π см^2. Знайти гострий кут ромба.

22. Периметр ромба $2p$, а сума діагоналей дорівнює m. Знайти площу ромба.

23. Знайти площу паралелограма $ABCD$, у якому сторона $AB = \sqrt{13}$ см, діагональ $BD = 6$ см, а гострий кут між діагоналями дорівнює 60°.

24. У трапеції більша основа дорівнює 5 см, одна з бічних сторін дорівнює 3 см. Відомо, що одна з діагоналей перпендикулярна даній бічній стороні, а друга ділить кут між даними бічною стороною та основою навпіл. Знайти площу трапеції.

25. Знайти площу рівнобічної трапеції, у якої основи дорівнюють 12 і 20 см, а діагоналі взаємно перпендикулярні.

26. У трапеції $ABCD$ довжина меншої основи BC дорівнює 3 м, довжина бічних сторін AB і CD дорівнює по 3 м. Діагоналі трапеції утворюють між собою кут 60°. Знайти довжину основи AD.

27. У рівнобічній трапеції основи дорівнюють a і b, а кут між діагоналлю та основою дорівнює α. Знайти довжину відрізка, що з'єднує точку перетину діагоналей із серединою бічної сторони трапеції.

28. Сума внутрішніх кутів опуклого многокутника у 2 рази більша суми його зовнішніх кутів. Скільки сторін у цього многокутника?

29. Знайти кількість сторін опуклого многокутника, у якого сума внутрішніх кутів більша суми зовнішніх на 540°.

30. Сума зовнішніх кутів правильного многокутника разом з одним із внутрішніх кутів становить 532°. Знайти кількість сторін многокутника.

§ 3. Основні поняття та теореми стереометрії

Це треба знати!

1. Паралельність прямих і площин

Паралельні прямі в просторі. Мимобіжні прямі

Дві прямі в просторі називаються ***паралельними***, якщо вони лежать в одній площині й не перетинаються.

Прямі, які не перетинаються й не лежать в одній площині, називаються ***мимобіжними***.

Ознака паралельності прямих

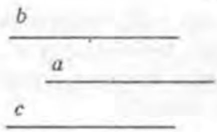


Рис. 247

$$\left.\begin{aligned} b \parallel a,\\ c \parallel a,\end{aligned}\right\} \Rightarrow b \parallel c \text{ (рис. 247)}$$

Дві прямі, паралельні третій прямій, паралельні між собою.

Ознака мимобіжних прямих

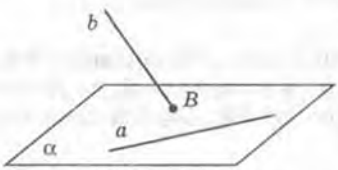


Рис. 248

$$\left.\begin{aligned} &a \subset \alpha,\\ &b \not\subset \alpha,\\ &B \text{ — точка перетину}\\ &\text{прямої } b \text{ і площини } \alpha;\\ &B \notin a\end{aligned}\right\} \Rightarrow a \text{ і } b \text{ — мимобіжні (рис. 248).}$$

Якщо одна з двох прямих лежить у площині, а інша перетинає цю площину в точці, яка не належить першій прямій, то дані прямі мимобіжні.

Пряма і площина називаються ***паралельними***, якщо вони не перетинаються.

Ознака паралельності прямої і площини

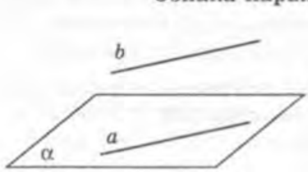


Рис. 249

$$\left.\begin{aligned} a \subset \alpha,\\ b \not\subset \alpha;\\ b \parallel a\end{aligned}\right\} \Rightarrow b \parallel \alpha. \text{ (рис. 249).}$$

Якщо пряма, яка не лежить у площині, паралельна якій-небудь прямій у цій площині, то вона паралельна і самій площині.

Властивість прямої і площини, які паралельні між собою

$$\left.\begin{array}{l} a \subset \alpha,\ \ a \parallel \beta; \\ b \text{ — пряма перетину } \alpha \text{ і } \beta \end{array}\right\} \Rightarrow b \parallel a \text{ (рис. 250).}$$

Якщо площина проходить через пряму, що паралельна другій площині, і перетинає цю площину, то пряма перетину паралельна даній прямій.

Дві площини називаються ***паралельними***, якщо вони не перетинаються.

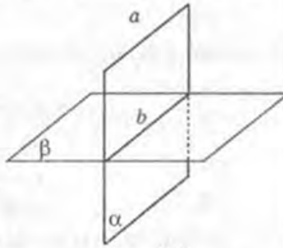


Рис. 250

Ознака паралельності площин

$$\left.\begin{array}{l} a_1 \subset \alpha, \\ a_2 \subset \alpha, \\ A \text{ – точка перетину } a_1 \text{ і } a_2; \\ b_1 \subset \beta, \\ b_1 \subset \beta, \\ a_1 \parallel b_1, \\ a_2 \parallel b_2, \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha \parallel \beta.$$

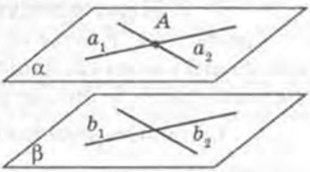


Рис. 251

Якщо дві прямі, які перетинаються (рис. 251), однієї площини відповідно паралельні двом прямим другої площини, то ці площини паралельні.

Властивості паралельних площин

1) $$\left.\begin{array}{l} \alpha \parallel \beta; \\ a \text{ — пряма перетину } \alpha \text{ і } \gamma; \\ b \text{ — пряма перетину } \beta \text{ і } \gamma; \end{array}\right\} \Rightarrow a \parallel b \text{ (рис. 252).}$$

Якщо дві паралельні площини перетинаються третьою, то прямі перетину паралельні.

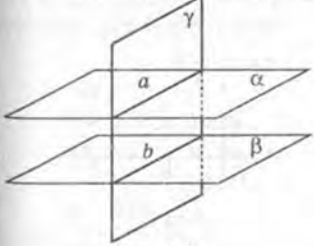


Рис. 252

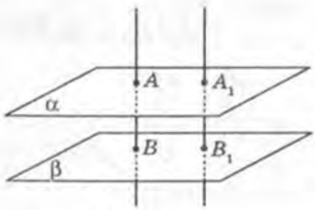


Рис. 253

2) (рис. 253):

$$\left.\begin{array}{l}\alpha \parallel \beta,\\ AB \parallel A_1B_1,\\ A \in \alpha,\\ A_1 \in \alpha,\\ B \in \beta,\\ B_1 \in \beta\end{array}\right\} \Rightarrow AB = A_1B_1$$

Відрізки паралельних прямих, які містяться між двома паралельними площинами, рівні.

2. Перпендикулярність прямих і площин

Пряма, яка перетинає площину, називається ***перпендикулярною до цієї площини***, якщо вона перпендикулярна до будь-якої прямої, що лежить у цій площині й проходить через точку перетину.

Ознака перпендикулярності прямої та площини

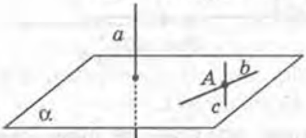


Рис. 254

$$\left.\begin{array}{l}b \subset \alpha,\\ c \subset \alpha,\\ A \text{ — точка перетину } b \text{ і } c;\\ a \perp b,\\ a \perp c,\end{array}\right\} \Rightarrow a \perp \alpha \text{ (рис. 254).}$$

Якщо пряма перпендикулярна до двох прямих, які лежать у площині і перетинаються, то вона перпендикулярна до даної площини.

Властивості прямої та площини, перпендикулярних між собою

1) $\left.\begin{array}{l}a \perp \alpha,\\ b \perp \alpha,\end{array}\right\} \Rightarrow a \parallel b$ (рис. 255).

Дві прямі, перпендикулярні до однієї й тієї самої площини, паралельні.

2) $\left.\begin{array}{l}a \parallel b,\\ a \perp \alpha\end{array}\right\} \Rightarrow b \perp \alpha$ (рис. 256).

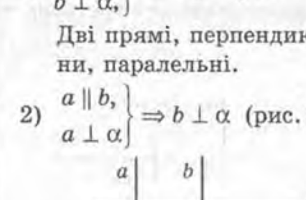


Рис. 255

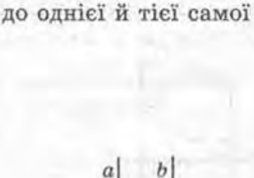


Рис. 256

> Якщо площина перпендикулярна до однієї з двох паралельних прямих, то вона перпендикулярна й до другої прямої.

Перпендикуляром, опущеним із даної точки на дану площину **(рис. 257)**, називається відрізок, що з'єднує дану точку з точкою площини й лежить на прямій, перпендикулярній до площини. Кінець цього відрізка, що лежить у площині, називається ***основою перпендикуляра***.

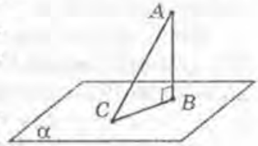


Рис. 257

Похилою (рис. 257), проведена з даної точки до площини, називається будь-який відрізок, що з'єднує дану точку з точкою площини і не є перпендикуляром до площини. Кінець цього відрізка, що лежить у площині, називається ***основою похилої***.

Відрізок, який сполучає основи перпендикуляра і похилої, проведених з однієї і тієї самої точки, називають ***проекцією похилої***.

Відстанню від точки до площини називається довжина перпендикуляра, опущеного з цієї точки на площину.

Відстанню між паралельними площинами називається відстань від будь-якої точки однієї площини до другої.

Відстань від прямої до паралельної їй площини називається відстань від будь-якої точки цієї прямої до площини.

Відстань між мимобіжними прямими

Спільним перпендикуляром до двох мимобіжних прямих називається відрізок із кінцями на цих прямих, перпендикулярний до кожної з них.

Відстанню між мимобіжними прямими називається довжина їх спільного перпендикуляра. Вона дорівнює відстані між паралельними площинами, які проходять через ці прямі.

Відстань між мимобіжними прямими дорівнює відстані від однієї з цих прямих до паралельної цій прямій площини, яку проведено через другу пряму.

Теорема про три перпендикуляри

1) $\left.\begin{array}{l} AC \perp \alpha, \\ BC \text{ — проекція похилої } AB \text{ на площину } \alpha, \\ a \subset \alpha,\ B \in a, \\ a \perp BC, \end{array}\right\} \Rightarrow a \perp AB$ (рис. 258).

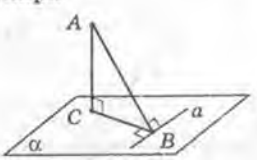


Рис. 258

2) $AC \perp \alpha$, BC — проекція похилої AB на площину α,

$$\left.\begin{array}{l} a \subset \alpha, \\ B \in a, \\ a \perp AB, \end{array}\right\} \Rightarrow a \perp BC \text{ (рис. 258).}$$

Якщо пряма, проведена на площині через основу похилої, перпендикулярна до її проекції, то вона перпендикулярна до похилої. І навпаки, якщо пряма на площині перпендикулярна до похилої, то вона перпендикулярна й до проекції похилої.

Рівні похилі, проведені до площини з однієї точки, мають рівні проекції; якщо похилі не рівні, то більша похила має більшу проекцію.

Перпендикулярність площин

Дві площини, що перетинаються, називаються ***перпендикулярними***, якщо третя площина, перпендикулярна до прямої перетину цих площин, перетинає їх по перпендикулярних прямих.

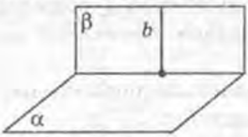


Рис. 259

Ознака перпендикулярності площин

$$\left.\begin{array}{l} b \perp \alpha, \\ b \subset \beta \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha \perp \beta \text{ (рис. 259).}$$

Якщо площина проходить через пряму, перпендикулярну до другої площини, то ці площини перпендикулярні.

Властивість перпендикулярних площин

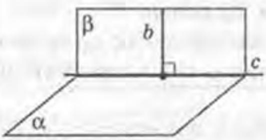


Рис. 260

$$\left.\begin{array}{l} \alpha \perp \beta,\ c \text{ — лінія перетину площин } \alpha \text{ і } \beta, \\ b \subset \beta, \\ b \perp c, \end{array}\right\} \Rightarrow b \perp \alpha \text{ (рис. 260).}$$

Якщо пряма, що лежить в одній із двох перпендикулярних площин, перпендикулярна до лінії їх перетину, то вона перпендикулярна й до другої площини.

3. Кути в просторі

Кут між прямою й площиною

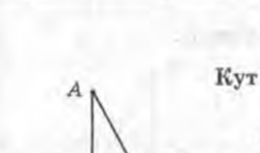


Рис. 261

Кутом між прямою й площиною називається кут між цією прямою та її проекцією на площину.

$AB \perp \alpha$; BC — проекція похилої AC на площину $\alpha \Rightarrow \angle ACB$ — кут між похилою AC і площиною α (рис. 261).

Кут між площинами

Нехай дві площини перетинаються. Проведемо площину, перпендикулярну до прямої їх перетину. Вона перетинає дані площини по двох прямих. Кут між цими прямими називається ***кутом між даними площинами***.

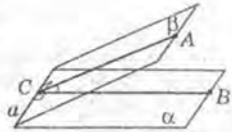


Рис. 262

a — лінія перетину площин α і β,
$AC \subset \beta$, $BC \subset \alpha$,
$AC \perp a$, $BC \perp a$,
$\Rightarrow \angle ACB$ — кут між площинами α і β (рис. 262).

Кут між мимобіжними прямими

Кутом між мимобіжними прямими називається кут між прямими, які перетинаються й паралельні даним мимобіжним прямим.

a і b — мимобіжні прямі,
$CD \parallel a$,
$AB \parallel b$, $\angle AOD$ — кут між прямими a і b,
O — точка перетину прямих AB і CD (рис. 263).

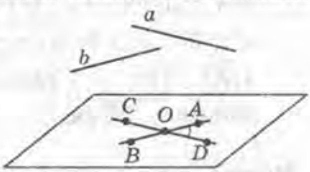


Рис. 263

Площа ортогональною проекції

Ортогональною проекцією точки називається основа перпендикуляра, опущеного з даної точки на площину.

Ортогональною проекцією фігури на площину називається множина проекцій усіх точок даної фігури на дану площину.

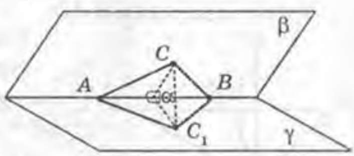


Рис. 264

Площа ортогональної проекції многокутника дорівнює площі проектованого многокутника, помноженій на косинус кута між їх площинами.

$\angle\alpha$ — кут між площинами β і γ;
$\triangle AC_1B$ — ортогональна проекція $\triangle ACB$ на площину γ;
$\Rightarrow S_{\triangle AC_1B} = S_{\triangle ACB} \cdot \cos\alpha$ (рис. 264).

Задача 1. Із точки, взятої поза площиною, проведено дві похилі, що дорівнюють 37 см і 13 см. Довжини проекцій цих похилих відносяться як 7 : 1. Знайти відстань від даної точки до даної площини.

Самовчитель

Розв'язання.

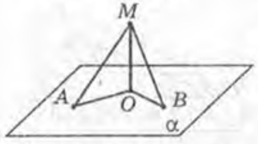


Рис. 265

Нехай $MO \perp \alpha$; MA і MB — похилі, проведені з точки M до площини α;

$MA = 37$ см, $MB = 13$ см (рис. 265).

AO і OB — проекції похилих AM і MB відповідно; $AO : OB = 7 : 1$. Нехай x см в одній частині, тоді $AO = 7x$, $OB = x$.

Оскільки $MO \perp \alpha$, то $\triangle MOA$ і $\triangle MOB$ — прямокутні. За наслідком із теореми Піфагора:

$$\begin{cases} MO^2 = AM^2 - AO^2, \\ MO^2 = MB^2 - OB^2; \end{cases}$$

$AM^2 - AO^2 = MB^2 - OB^2$; $37^2 - 49x^2 = 13^2 - x^2$;

$48x^2 = 1200$; $x^2 = 1200 : 48$;

$x^2 = 25$; $x_1 = 5$; $x_2 = -5$ (умові задачі не задовольняє).

$MO^2 = 13^2 - 5^2 = 169 - 25 = 144$; $MO = \sqrt{144} = 12$ (см).

Відповідь. 12 см.

Задача 2. Один із катетів прямокутного трикутника ABC дорівнює a, а гострий кут, прилеглий до цього катета, дорівнює α. Через вершину прямого кута C проведено пряму CD, перпендикулярну до площини цього трикутника, $CD = b$. Знайти відстань від точки D до прямої AB.

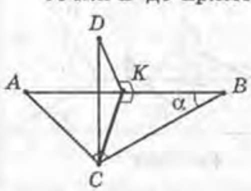


Рис. 266

Розв'язання.

Нехай $\triangle ABC$ — даний прямокутний трикутник $(\angle C = 90°)$ (рис. 266), у якому $BC = a$, $\angle B = \alpha$.

$CD \perp (ACB)$,

$CD = b$.

Побудуємо $DK \perp AB$.

$$\left.\begin{array}{l} CD \perp (ACB), \\ CK \text{ — проекція похилої } DK \\ \text{на площину } (ACB), \\ AB \subset (ACB), \\ K \in AB, \\ AB \perp DK. \end{array}\right\} \Rightarrow AB \perp CK \text{ (за теоремою про три перпендикуляри).}$$

Із прямокутного $\triangle CKB\,(\angle K = 90°)$ $CK = a \cdot \sin\alpha$;

$$\left.\begin{array}{l} CD \perp (ACB), \\ CK \subset (ACB) \end{array}\right\} \Rightarrow CD \perp CK.$$

Отже, $\triangle DCK$ — прямокутний $(\angle DCK = 90°)$.

За теоремою Піфагора

$DK^2 = CD^2 + CK^2$; $DK^2 = b^2 + a^2\sin^2\alpha$; $DK = \sqrt{b^2 + a^2\sin^2\alpha}$.

Відповідь. $\sqrt{b^2 + a^2\sin^2\alpha}$.

Задача 3. Через вершину A прямокутного трикутника ABC $(\angle C = 90°)$ проведено пряму AD перпендикулярно до площини трикутника. Знайти BD, якщо $BC = a$, $DC = b$.

Розв'язання.

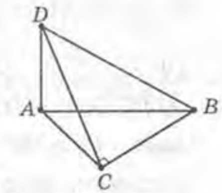


Рис. 267

$AD \perp (ACB)$,

AC — проекція похилої DC на площину (ABC),

$CB \subset (ACB)$,

$CB \perp AC \Rightarrow CB \perp DC$ (за теоремою про три перпендикуляри) (рис. 267). Отже, $\triangle DCB$ — прямокутний $(\angle DCB = 90°)$. За теоремою Піфагора $BD^2 = DC^2 + BC^2$; $BD^2 = a^2 + b^2$; $BD = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Відповідь. $\sqrt{a^2 + b^2}$.

Задача 4. Основа й висота рівнобедреного трикутника дорівнюють 4 см. Дана точка розміщена на відстані 6 см від площини трикутника й на однаковій відстані від його вершин. Знайти цю відстань.

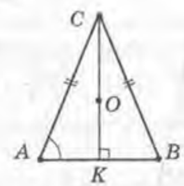


Рис. 268

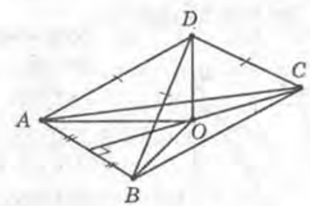


Рис. 269

Розв'язання.

Нехай $\triangle ABC$ — даний рівнобедрений трикутник $(AC = BC)$ (рис. 268), в якому $AB = 4$ см, $CK \perp AB$, $CK = 4$ см.

$DO \perp (ABC)$ (рис. 269), $DO = 6$ см, $AD = BD = CD$. Оскільки $DO \perp (ABC)$, то трикутники AOD, BOD, COD — прямокутні. У них рівні гіпотенузи й спільний катет DO.

$\triangle DOA = \triangle DOB = \triangle DOC$ (за катетом і гіпотенузою).

Отже, $AO = OB = OC$ (як відповідні сторони рівних трикутників). Звідси точка O — центр описаного навколо $\triangle ABC$ кола.

Оскільки центр описаного кола є точкою перетину серединних перпендикулярів, то $O \in CK$.

З прямокутного $\triangle CKA$ за теоремою Піфагора

$AC^2 = CK^2 + AK^2$; $AC^2 = 4^2 + 2^2$;

$AC^2 = 16 + 4 = 20$; $AC = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

$\sin \angle A = \dfrac{CK}{AC} = \dfrac{4}{2\sqrt{5}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

За наслідком із теореми синусів $\dfrac{BC}{\sin \angle A} = 2R$; $\dfrac{2\sqrt{5}}{\frac{2}{\sqrt{5}}} = 2R$;

$\dfrac{10}{2} = 2R$; $5 = 2\sqrt{R}$; $R = \dfrac{5}{2} = 2{,}5$.

Отже, $AO = BO = CO = 2{,}5$.

Із прямокутного $\triangle AOD$ $(\angle O = 90^\circ)$ за теоремою Піфагора

$AD^2 = AO^2 + DO^2$; $AD^2 = 2{,}5^2 + 6^2$;

$AD^2 = 42{,}25$; $AD = \sqrt{42{,}25} = 6{,}5$.

Відповідь. 6,5 см.

Задача 5. Із деякої точки простору до площини прямокутного трикутника, площа якого 294 см², а один із катетів — 28 см, проведено перпендикуляр, довжина якого 9 см. Основа перпендикуляра лежить на гіпотенузі. Відстані від даної точки до катетів однакові. Знайти ці відстані.

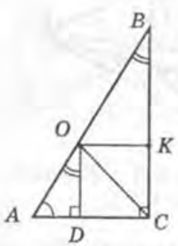


Рис. 270

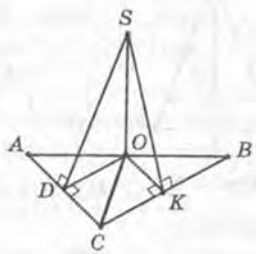


Рис. 271

Розв'язання.

Нехай $\triangle ABC$ — даний прямокутний трикутник (рис. 270), у якому $BC = 28$ см, $S_{\triangle ABC} = 294$ см².

$S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2} AC \cdot BC$; $\dfrac{1}{2} AC \cdot 28 = 294$;

$14AC = 294$; $AC = 294 : 14$; $AC = 21$.

За теоремою Піфагора

$AB^2 = AC^2 + BC^2$; $AB^2 = 21^2 + 28^2$;

$AB^2 = 441 + 784 = 1225$; $AB = \sqrt{1225} = 35$ (см).

За умовою задачі $SO \perp (ACB)$, $O \in AB$, $SO = 9$ см;

$SD \perp AC$, $SK \perp BC$, $SD = SK$.

$$\left.\begin{array}{l} SO \perp (ACB), \\ OD,\ OK \text{ — проекції похилих} \\ SD \text{ і } SK \text{ відповідно на } (ACB); \\ AC \subset (ACB), \\ BC \subset (ACB), \\ AC \perp SD, \\ BC \perp SK, \end{array}\right\} \Rightarrow AC \perp OD;\ BC \perp OK \text{ (за теоремою про три перпендикуляри) (рис. 271).}$$

Отже, трикутники ODC і OKC — прямокутні.

Оскільки $SO \perp (ACB)$, то трикутники SOD і SOK — прямокутні. У них рівні гіпотенузи SD і SK і спільний катет SO.

Отже, $\triangle SOD = \triangle SOK$ (за катетом і гіпотенузою). Звідси $OD = OK$ (як відповідні сторони рівних трикутників). Отже, чотирикутник $DCKO$ — квадрат, і CO — бісектриса $\angle ACB$.

За властивістю бісектриси трикутника

$\dfrac{AO}{OB} = \dfrac{AC}{BC}$; $\dfrac{AO}{OB} = \dfrac{21}{28} = \dfrac{3}{4}$.

Нехай x см в одній частині, тоді $AO = 3x$, $OB = 4x$.

Оскільки $AO + OB = AB$, тоді $3x + 4x = 35$; $7x = 35$; $x = 5$;

$AO = 3x = 3 \cdot 5 = 15$ (см).

Розглянемо прямокутні трикутники ADO і ACB.

У них $\angle A$ — спільний.

Отже, $\triangle ADO \sim \triangle ACB$ (за двома кутами).

$\dfrac{AO}{AB} = \dfrac{OD}{BC}$; $\dfrac{15}{35} = \dfrac{OD}{28}$; $OD = \dfrac{15 \cdot 28}{35} = 12$ (см).

Із прямокутного $\triangle SOD$ $(\angle O = 90^\circ)$ за теоремою Піфагора:

$SD^2 = SO^2 + OD^2$; $SD^2 = 9^2 + 12^2$;

$SD^2 = 225$; $SD = \sqrt{225} = 15$ (см).

Відповідь. 15 см.

Задача 6. Деяка точка рівновіддалена від сторін правильного трикутника на 49 см. Периметр трикутника дорівнює 144 см. Знайти відстань від цієї точки до площини трикутника.

Розв'язання.

Нехай $\triangle ACB$ — даний правильний трикутник (рис. 272), $P_{\triangle ACB} = 144$ см. $AB = BC = AC = 144 : 3 = 48$ (см).

$DO \perp (ACB)$ (рис. 273); $DN \perp AC$, $DK \perp BC$, $DM \perp AB$;

$DN = DK = DM = 49$ см.

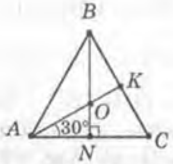


Рис. 272

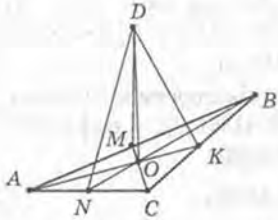


Рис. 273

ON, OK, OM — проекції похилих DN, DK, DM відповідно. За теоремою про три перпендикуляри $ON \perp AC$, $OK \perp BC$, $OM \perp AB$.

Оскільки $DO \perp (ABC)$, то трикутники DON, DOK, DOM— прямокутні. У них рівні гіпотенузи й спільний катет DO. Отже, $\triangle DON = \triangle DOK = \triangle DOM$ (за катетом і гіпотенузою).

Звідси $ON = OM = OK$ (як відповідні сторони рівних трикутників).

$$\left.\begin{aligned} &ON = OK = OM, \\ &ON \perp AC, \\ &OK \perp BC, \\ &OM \perp AB, \end{aligned}\right\} \Rightarrow O \text{ — центр вписаного в } \triangle ABC \text{ кола; } ON, OK, OM \text{ — радіуси цього кола.}$$

Оскільки $\triangle ABC$ — правильний, то O — точка перетину медіан. Із прямокутного $\triangle ANO\,(\angle N = 90^\circ)$:

$$ON = AN \cdot \operatorname{tg} 30^\circ = 24 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 8\sqrt{3} \text{ (см).}$$

Із прямокутного $\triangle DON\,(\angle O = 90^\circ)$ за наслідком із теореми Піфагора $DO^2 = DN^2 - ON^2$;

$$DO = \sqrt{49^2 - \left(8\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{2401 - 192} = \sqrt{2209} = 47 \text{ (см).}$$

Відповідь. 47 см.

Задача 7. Рівнобедрені трикутники мають спільну основу завдовжки 16 см, а їх площини утворюють між собою кут 60°. Бічна сторона одного трикутника дорівнює 17 см, а бічні сторони другого трикутника взаємно перпендикулярні. Знайти відстань між вершинами трикутника.

Розв'язання.

Нехай ACB, ABD — дані рівнобедрені трикутники (рис. 274), $AD = BD = 17$ см; $AC \perp CB$, $AB = 16$ см. Побудуємо $DK \perp AB$, тоді $AK = BK = 8$ см.

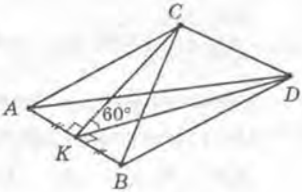


Рис. 274

Оскільки $\triangle ACB$ — рівнобедрений, то $CK \perp AB$.

$$\left.\begin{array}{l} AB \text{ — лінія перетину} \\ (ACB) \text{ і } (ADB), \\ CK \subset (ACB), \\ DK \subset (ADB), \\ CK \perp AB, \\ DK \perp AB \end{array}\right\} \Rightarrow \angle CKD \text{ — кут між площинами } (ACB) \text{ і } (ADB). \text{ За умовою задачі } \angle CKD = 60^\circ.$$

Розглянемо прямокутний $\triangle ACB(\angle 90^\circ)$, де CK — висота, проведена з вершини прямого кута до гіпотенузи.

$CK = \sqrt{AK \cdot BK} = \sqrt{8 \cdot 8} = 8$ (см).

З прямокутного трикутника $AKD(\angle K = 90^\circ)$ за наслідком із теореми Піфагора:

$DK^2 = AD^2 - AK^2;$

$DK = \sqrt{17^2 - 8^2} = \sqrt{(17-8)(17+8)} = \sqrt{9 \cdot 25} = 3 \cdot 5 = 15$ (см).

З $\triangle CKD$ за теоремою косинусів маємо:

$CD^2 = CK^2 + DK^2 - 2CK \cdot DK \cdot \cos 60^\circ;$

$CD^2 = 8^2 + 15^2 - 2 \cdot 8 \cdot 15 \cdot \frac{1}{2};$

$CD^2 = 64 + 225 - 120;$ $CD^2 = 169;$ $CD = \sqrt{169} = 13$ (см).

Відповідь. 13 см.

Задача 8. Кінці відрізка AB належать перпендикулярним площинам α і β. Відстані AA_1 і BB_1 від точок A і B до лінії перетину даних площин дорівнюють відповідно a і b, відстань A_1B_1 дорівнює c. Знайти AB.

Розв'язання.

$$\left.\begin{array}{l} \alpha \perp \beta; \\ m \text{ — лінія перетину} \\ \qquad \alpha \text{ і } \beta, \\ BB_1 \subset \beta, \\ BB_1 \perp m \text{ (рис. 275)} \end{array}\right\} \Rightarrow BB_1 \perp \alpha$$

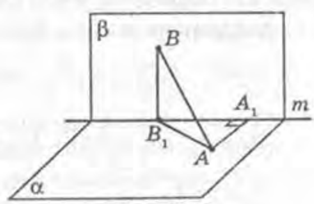


Рис. 275

$$\left.\begin{array}{l} BB_1 \perp \alpha, \\ B_1A \subset \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow BB_1 \perp B_1A.$$

Отже, $\triangle BB_1A$ — прямокутний $(\angle B_1 = 90°)$.

Із прямокутного $\triangle B_1A_1A\,(\angle A_1 = 90°)$ за теоремою Піфагора

$AB_1^2 = B_1A_1^2 + AA_1^2;\;\; AB_1^2 = a^2 + c^2.$

Із прямокутного $\triangle BB_1A\,(\angle B_1 = 90°)$ за теоремою Піфагора

$AB^2 = BB_1^2 + AB_1^2;$

$AB^2 = b^2 + a^2 + c^2;$

$AB = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$

Відповідь. $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

Задача 9. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дорівнює a. Знайти відстань між прямими CC_1 і BD_1.

Розв'язання.

$$\left.\begin{array}{l} CC_1 \parallel BB_1; \\ BB_1 \subset (DBB_1) \end{array}\right\} \Rightarrow CC_1 \parallel (DBB_1)$$ (за ознакою паралельності прямої та площини) (рис. 276).

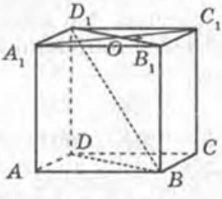


Рис. 276

$$\left.\begin{array}{l} (DBB_1) \perp (A_1B_1C_1), \\ B_1D_1 \text{ — лінія перетину} \\ (DBB_1) \text{ і } (A_1B_1C_1), \\ C_1O \perp B_1D_1 \text{ (за властивістю} \\ \text{діагоналей квадрата),} \\ C_1O \subset (A_1B_1C_1) \end{array}\right\} \Rightarrow C_1O \perp (DBB_1)$$

$$\left.\begin{array}{l} CC_1 \parallel (DBB_1), \\ C_1O \perp (DBB_1), \\ C_1 \in CC_1, \\ BD_1 \subset (DBB_1) \end{array}\right\} \Rightarrow C_1O$$ — спільний перпендикуляр до мимобіжних прямих CC_1 і BD_1.

Із прямокутного $\triangle A_1D_1C_1\,(\angle D_1 = 90°)$ за теоремою Піфагора

$A_1C_1^2 = A_1D_1^2 + D_1C_1^2;\;\; A_1C_1^2 = a^2 + a^2;\;\; A_1C_1^2 = 2a^2;$

$A_1C_1 = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2};\;\; OC_1 = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}.$

Відповідь. $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Задачі для самостійного розв'язування

Перевір себе

1. Із точки до площини проведені дві похилі, що дорівнюють 23 см і 33 см. Знайти довжину перпендикуляра до площини, якщо проекції похилих відносяться як 2 : 3.

2. Із деякої точки до площини проведені перпендикуляр і похила, кут між якими дорівнює α. Знайти перпендикуляр і проекцію похилої, якщо похила дорівнює m.

3. Із точки до площини проведені дві похилі. Знайти довжини похилих, якщо одна з них на 13 см більша від другої, а проекції похилих дорівнюють 6 см і 20 см.

4. Із точки до площини проведені перпендикуляр і дві похилі. Довжини похилих дорівнюють 35 см і 75 см, проекції похилих на площину відносяться як 7 : 18. Знайти довжину перпендикуляра.

5. Сторони трикутника дорівнюють 10 см, 17 см і 21 см. Із вершини більшого крута трикутника провели відрізок, що дорівнює 15 см і перпендикулярний до площини трикутника. Знайти відстань від його кінців до більшої сторони.

6. Пряма OK перпендикулярна до площини ромба $ABCD$, діагоналі якого перетинаються в точці O. Знайти відстань від точки K до всіх прямих, які містять сторони ромба, якщо $OK = 4{,}5$ см, $AC = 6$ см, $BD = 8$ см.

7. З вершини рівностороннього трикутника ABC проведено перпендикуляр AD до площини трикутника. Знайти відстань від точки D до сторони BC, якщо $AD = 13$ см, $BC = 6$ см.

8. Відстані від точки A до всіх сторін квадрата дорівнюють a. Знайти відстань від точки A до площини квадрата, якщо діагональ квадрата дорівнює l.

9. У рівнобедреному трикутнику з основою 6 см і бічною стороною 5 см із центра вписаного в нього кола проведено перпендикуляр до площини трикутника завдовжки 2 см. Знайти відстань від кінця цього перпендикуляра до сторін трикутника.

10. Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює 12 см. Поза площиною трикутника дано точку, яка розміщена на відстані 10 см від кожної вершини. Знайти відстань від цієї точки до площини трикутника.

11. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 18 см і 32 см. До площини трикутника із середини гіпотенузи проведено перпендикуляр, який дорівнює 12 см. Знайти відстані від кінців перпендикуляра до катетів.

12. Периметр рівностороннього трикутника — 27 см. Деяка точка рівновіддалена від вершин трикутника на 14 см. Знайти відстань від цієї точки до площини трикутника.

13. Із деякої точки простору до площини прямокутного трикутника, площа якого дорівнює 216 см^2, а один із катетів — 24 см, проведено перпендикуляр. Основа цього перпендикуляра належить іншому катету. Відстані від даної точки до даного катета і гіпотенузи дорівнюють 17 см. Знайти відстань від даної точки до площини даного трикутника.

14. Із точки, віддаленої від площини на відстань h, проведено дві похилі, які утворюють із площиною кути, що дорівнюють φ, а між собою — прямий кут. Знайти відстань між точками перетину похилих із площиною.

15. Похила AB утворює з площиною α кут 45°, а пряма AC, що лежить у площині α,— утворює кут 45° із проекцією похилої AB. Знайти $\angle BAC$.

16. Через вершину D квадрата $ABCD$ до його площини проведено перпендикуляр DK, що дорівнює 6 см. Кут між площинами ABC і KBC дорівнює 45°. Знайти площу квадрата $ABCD$ і трикутника BCK.

17. Рівнобедрені трикутника ABC і ABD із спільною основою AB лежать у різних площинах, кут між якими дорівнює α. Знайти кут α, якщо $AB = 6$ см, $CD = \sqrt{21}$ см, $AC = AD = 4$ см.

18. Знайти довжини сторін правильних трикутників ABC і ABD, якщо їх площини перпендикулярні і $CD = a$.

19. Ортогональною проекцією прямокутника на деяку площину є квадрат. Одна із сторін і діагональ прямокутника дорівнюють 6 см і $2\sqrt{21}$ см. Знайти кут між площиною прямокутника і квадрата.

20. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дорівнює a. Знайти відстань між прямими: 1) AB і CC_1; 2) CC_1 і B_1D_1; 3) AC і B_1D_1.

21. У прямокутному паралелепіпеді $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $AB = a$, $AD = b$, $AA_1 = c$. Знайти відстань між прямими:
1) AB_1 і BC; 2) AA_1 і BD_1.

22. До площини рівнобедреного трикутника ABC проведено перпендикуляр AK. Площа трикутника ABC дорівнює 48 см^2, $BC = 16$ см. Знайти відстань між прямими AK і BC.

23. Через вершину C прямого кута трикутника ABC проведено пряму a, перпендикулярну до площини трикутника. $AC = 15$ см, $BC = 20$ см. Знайти відстань між прямими a і AB.

§ 4. Многогранники

1. Двогранний кут

Це треба знати!

Двогранним кутом називається фігура, утворена двома півплощинами зі спільною прямою, що їх обмежує. Півплощини називаються ***гранями***, а пряма, що їх обмежує, — ***ребром*** двогранного кута.

Площина, перпендикулярна до ребра двогранного кута, перетинає його грані по двох півпрямих.

Кут, утворений цими півпрямими, називається ***лінійним кутом двогранного кута***. За міру двогранного кута приймається міра відповідного йому лінійного кута. Усі лінійні кути двогранного кута рівні.

Якщо з точки ребра двогранного кута в кожній його грані провести півпрямі, перпендикулярні до ребра двогранного кута, то кут між цими півпрямими є лінійним кутом даного двогранного кута:

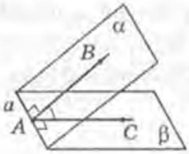


Рис. 277

$$\left.\begin{array}{l} a \text{ — лінія перетину} \\ \text{площин } \alpha \text{ і } \beta, \\ A \in a; \\ AB \subset \alpha, \\ AC \subset \beta, \\ AB \perp a, \\ AC \perp a \end{array}\right\} \Rightarrow \angle BAC \text{ — лінійний кут двогранного кута (рис. 277)}$$

2. Призми

Многогранником називається геометричне тіло, поверхня якого складається із скінченної кількості многокутників.

Многокутники, які обмежують многогранник, називають ***гранями***, а їх сторони — ***ребрами***, кінці ребер — ***вершинами многогранника***. Відрізок, який сполучає дві вершини, що не належать одній грані, називається ***діагоналлю многогранника***.

Призмою називається многогранник, у якого дві грані — рівні n-кутники, а решта n граней — паралелограми.

Рівні n-кутники, про які йдеться в цьому означенні, називають **основами призми**. Їх відповідні сторони попарно рівні й паралельні. Усі грані призми, які не є основами, називають ***бічними гранями***. ***Бічними ребрами призми*** називають усі її ребра, які не є сторонами основ. Усі бічні ребра призми рівні й паралельні.

Призма називається ***прямою***, якщо її бічні ребра перпендикулярні до площини основи. Усі інші призми — ***похилі***. Кожна бічна грань прямої призми — прямокутник.

Пряма призма називається ***правильною***, якщо її основи є правильними многокутниками.

Висотою призми називається відстань між площинами її основ.

Висота прямої призми дорівнює довжині її бічного ребра.

Площина, що проходить через два бічних ребра призми, які не лежать в одній грані, називається ***діагональною площиною***, а переріз призми цією площиною — ***діагональним перерізом***.

Площею бічної поверхні призми називають суму площ її бічних граней.

Площа бічної поверхні прямої призми дорівнює добутку периметра її основи на висоту призми:

$S_б = P \cdot H$.

Щоб знайти площу бічної поверхні похилої призми, треба знайти площу кожної її бічної грані й результати додати.

Площа повної поверхні призми дорівнює сумі площ її бічної поверхні й двох основ: $S_п = S_б + 2S_о$.

Паралелепіпедом називається призма, основа якої — паралелограм. Усі грані паралелепіпеда — паралелограми.

Паралелепіпед, бічні ребра якого перпендикулярні до площини основи, називається ***прямим паралелепіпедом.*** Його бічні грані — прямокутники.

Прямий паралелепіпед, у якого основою є прямокутник, називається ***прямокутним паралелепіпедом.*** Усі грані прямокутного паралелепіпеда — прямокутники.

Прямокутний паралелепіпед, у якого всі ребра рівні, називається ***кубом.***

Властивості граней і діагоналей паралелепіпеда

1) У паралелепіпеда протилежні грані паралельні й рівні.
2) Діагоналі паралелепіпеда перетинаються в одній точці й точкою перетину діляться навпіл.
3) Точка перетину діагоналей паралелепіпеда є його центром симетрії.

Властивості граней і діагоналей прямокутного паралелепіпеда

1) Усі діагоналі прямокутного паралелепіпеда рівні між собою.
2) У прямокутному паралелепіпеді квадрат будь-якої його діагоналі дорівнює сумі квадратів трьох його лінійних вимірів (рис. 278):

$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$. Об'єм прямокутного паралелепіпеда з лінійними вимірами a, b, c обчислюється за формулою:

$$V = abc.$$

Об'єм будь-якого паралелепіпеда дорівнює добутку площі основи на висоту

$$V = S_o \cdot H.$$

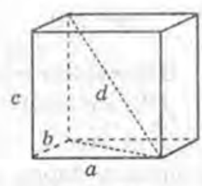


Рис. 278

Об'єм будь-якої призми дорівнює добутку площі її основи на висоту $V = S_o \cdot H$.

Якщо в похилій призмі проведено переріз, який перпендикулярний до бічних ребер і перетинає всі бічні ребра, то $V = Q \cdot l$, де Q — площа перпендикулярного перерізу, l — довжина бічного ребра.

Задача 1. Бічна поверхня правильної чотирикутної призми дорівнює 48 см², а повна поверхня — 66 см². Знайти об'єм призми.

Самовчитель

Розв'язання.

Нехай $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — зображення даної правильної чотирикутної призми (рис. 279), $ABCD$ — квадрат,

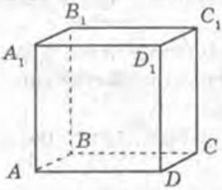


Рис. 279

$AB = BC = CD = AD = a$,

тоді $S_п = S_б + 2S_о$; $S_п = P \cdot H + 2a^2$;

$48 + 2a^2 = 66$; $2a^2 = 66 - 48$; $a^2 = 9$; $a = 3$.

$P = 4a = 4 \cdot 3 = 12$ (см);

$12 \cdot H = 48$; $H = 48 : 12 = 4$ (см);

$V = S_о \cdot H = a^2 \cdot H = 9 \cdot 4 = 36$ (см^3).

Відповідь. 36 см^3.

Задача 2. Діагональ прямокутного паралелепіпеда дорівнює d і нахилена до площини основи під кутом β. Кут між стороною основи та діагоналлю основи дорівнює α. Знайти об'єм паралелепіпеда.

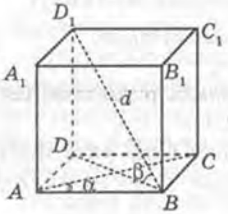


Рис. 280

Розв'язання.

Нехай $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — зображення даного прямокутного паралелепіпеда (рис. 280), у якому $BD_1 = d$, $\angle CAB = \alpha$.

Оскільки BD — проекція похилої BD_1 на площину основи, то

$\angle DBD_1$ — кут між діагоналлю BD_1 і площиною основи.

За умовою задачі $\angle DBD_1 == \beta$.

З прямокутного $\triangle D_1DB\,(\angle D = 90°)$ знайдемо DD_1 і DB:

$DD_1 = d \cdot \sin\beta$; $DB = d \cdot \cos\beta$.

Оскільки діагоналі прямокутника рівні, то $DB = AC = d \cdot \cos\beta$.
Із прямокутного $\triangle ABC\,(\angle B = 90°)$ знайдемо AB і BC:

$AB = AC \cdot \cos\alpha = d\cos\beta \cdot \cos\alpha$;

$BC = AC \cdot \sin\alpha = d\cos\beta \cdot \sin\alpha$.

$$S_о = AB \cdot BC = d\cos\beta\cos\alpha \cdot d\cos\beta\sin\alpha = \frac{1}{2}d^2\cos^2\beta\sin 2\alpha.$$

$$V = S_о \cdot H = S_о \cdot DD_1 = \frac{1}{2}d^2\cos^2\beta\sin 2\alpha \cdot d\sin\beta =$$

$$= \frac{1}{4}d^3\sin 2\alpha\sin 2\beta \cdot \cos\beta.$$

Відповідь. $\frac{1}{4}d^3\sin 2\alpha\sin 2\beta \cdot \cos\beta$.

Задача 3. У правильній трикутній призмі проведено переріз, який проходить через одну із сторін нижньої основи і протилежну вершину верхньої основи. Знайти площу перерізу, якщо сторона основи дорівнює a, площина перерізу утворює з площиною основи кут α.

Розв'язання.

Нехай $ABCA_1B_1C_1$ — зображення даної правильної призми (рис. 281), у якій $AB = AC = BC = a$, $\triangle AB_1C$ — переріз призми.

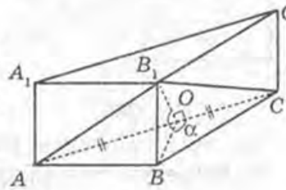


Рис. 281

Оскільки $AB_1 = B_1C$ (як діагоналі рівних прямокутників), то $\triangle AB_1C$ — рівнобедрений.

Побудуємо $B_1O \perp AC$, тоді BO — проекція похилої B_1O на (ABC). За теоремою про три перпендикуляри $BO \perp AC$.

$$\left.\begin{array}{l} AC \text{ — лінія перетину} \\ (AB_1C) \text{ і } (ABC), \\ B_1O \subset (AB_1C), \\ BO \subset (ABC), \\ B_1O \perp AC, \\ BO \perp AC \end{array}\right\} \Rightarrow \angle B_1OB \text{ — кут між площинами } (ABC) \text{ і } (AB_1C).$$

За умовою задачі $\angle B_1OB = \alpha$.

З прямокутного $\triangle BOC\,(\angle O = 90^\circ)$ знайдемо BO:

$BO = BC \cdot \sin 60^\circ$;

$$BO = a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

З прямокутного $\triangle B_1BO\,(\angle B = 90^\circ)$ знайдемо B_1O:

$$B_1O = \frac{BO}{\cos\alpha} = \frac{a\sqrt{3}}{2\cos\alpha}.$$

Отже, $S_{\triangle AB_1C} = \dfrac{1}{2} AC \cdot B_1O = \dfrac{1}{2} a \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2\cos\alpha} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4\cos\alpha}$.

Відповідь. $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4\cos\alpha}$.

Задача 4. Основою прямої призми є рівнобедрений трикутник, бічна сторона якого дорівнює b, а кут при вершині дорівнює α. Знайти об'єм призми, якщо її бічна поверхня дорівнює S.

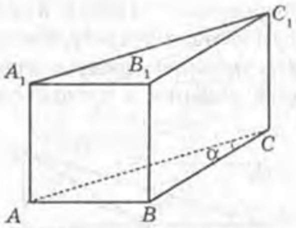


Рис. 282

Розв'язання.

Нехай $ABCA_1B_1C_1$ — зображення даної прямої призми (рис. 282), в якій $\triangle ABC$ — рівнобедрений:

$AC = BC = b, \ \angle ACB = \alpha.$

$$S_o = \frac{1}{2} AC \cdot BC \cdot \sin\alpha = \frac{b^2 \sin\alpha}{2}.$$

$$\angle A = \angle B = \frac{180^\circ - \alpha}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$$

(як кути при основі рівнобедреного трикутника).

За теоремою синусів маємо:

$$\frac{AB}{\sin\alpha} = \frac{AC}{\sin\left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}; \quad \frac{AB}{\sin\alpha} = \frac{b}{\cos\frac{\alpha}{2}};$$

$$AB = \frac{b\sin\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{2b \cdot \sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = 2b\sin\frac{\alpha}{2}.$$

$$P = AC + BC + AB = b + b + 2b\sin\frac{\alpha}{2} = 2b + 2b\sin\frac{\alpha}{2} =$$

$$= 2b\left(1 + \sin\frac{\alpha}{2}\right);$$

$$P \cdot H = S;$$

$$H = \frac{S}{P} = \frac{S}{2b\left(1 + \sin\frac{\alpha}{2}\right)};$$

$$V = S_o \cdot H = \frac{b^2 \sin\alpha}{2} \cdot \frac{S}{2b\left(1 + \sin\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{bS\sin\alpha}{4\left(1 + \sin\frac{\alpha}{2}\right)} =$$

$$= \frac{bS\sin\alpha}{4\left(1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)\right)} = \frac{bS\sin\alpha}{8\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{4}\right)}.$$

Відповідь. $\dfrac{bS\sin\alpha}{8\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{4}\right)}.$

Задача 5. Знайти об'єм похилої трикутної призми, якщо площа бічної грані дорівнює S, а відстань від цієї грані до протилежного ребра дорівнює d.

Розв'язання.

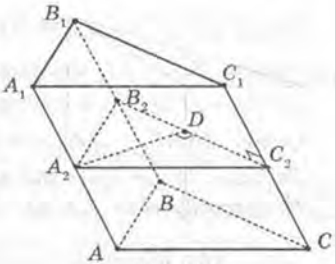


Рис. 283

Нехай $ABCA_1B_1C_1$ — зображення даної похилої трикутної призми (рис. 283), у якій $S_{BB_1C_1C} = S$.

Побудуємо площину $(A_2B_2C_2)$, перпендикулярну бічним ребрам, побудуємо $A_2D \perp B_2C_2$, тоді

$$\left.\begin{array}{l}(A_2B_2C_2) \perp (B_1C_1C),\\ B_2C_2 \text{ — лінія перетину}\\ (A_2B_2C_2) \text{ і } (B_1C_1C),\\ A_2D \subset (A_2B_2C_2),\\ A_2D \perp B_2C_2\end{array}\right\} \Rightarrow A_2D \perp (B_1C_1C).$$

$$\left.\begin{array}{l}A_2D \perp AA_1\\ A_2D \perp (B_1C_1C)\end{array}\right\} \Rightarrow A_2D \text{ — відстань від } (B_1C_1C) \text{ до } A_1A.$$

За умовою задачі $A_2D = d$.

$$S_{\triangle A_2B_2C_2} = \frac{1}{2} A_2D \cdot B_2C_2 = \frac{1}{2} d \cdot B_2C_2.$$

Отже, $V = S_{\triangle A_2B_2C_2} \cdot CC_1 = \frac{1}{2} d \cdot B_2C_2 \cdot CC_1 = \frac{1}{2} d \cdot S.$

Відповідь. $\frac{1}{2} d \cdot S.$

Задача 6. Довжини ребер похилого паралелепіпеда дорівнюють a, b, c. Ребра, довжини яких дорівнюють a і b, взаємно перпендикулярні, а ребро завдовжки c утворює з кожним із них кут 60°. Знайти об'єм паралелепіпеда.

Розв'язання.

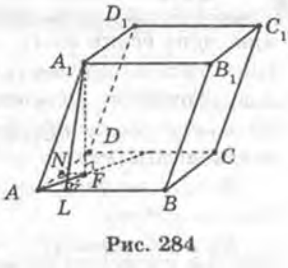


Рис. 284

Нехай $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — зображення даного похилого паралелепіпеда (рис. 284), у якому $ABCD$ — прямокутник, $AB = a$, $BC = b$, $AA_1 = c$, $A_1F \perp (ABC)$, $\angle A_1AB = \angle A_1AD = 60°$.

Побудуємо $FL \perp AB$; $FN \perp AD$, тоді за теоремою про три перпендикуляри, $A_1L \perp AB$ і $A_1N \perp AD$. Розглянемо прямокутні трикутники A_1LA і A_1NA. У них спільна гіпотенуза A_1A, $\angle A_1AL = \angle A_1AN$ (за умовою).

Отже, $\triangle A_1AL = \triangle A_1AN$ (за гіпотенузою і гострим кутом).

Звідси, $AN = AL$ (як відповідні сторони рівних трикутників).

$\triangle FNA = \triangle FLA$ (за катетом і гіпотенузою).

Отже, $\angle NAF = \angle FAL$ (як відповідні кути рівних трикутників).

Звідси, AF — бісектриса $\angle NAL$.

Із прямокутного $\triangle A_1AL$ знайдемо AL:

$$AL = AA_1 \cdot \cos 60^\circ = c \cdot \cos 60^\circ = \frac{c}{2}.$$

Із прямокутного $\triangle AFL$ знайдемо AF:

$$AF = \frac{AL}{\cos 45^\circ} = \frac{c}{2} : \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{c\sqrt{2}}{2}.$$

Із прямокутного $\triangle A_1AF$ за теоремою Піфагора маємо:

$$A_1F = \sqrt{c^2 - \left(\frac{c\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{c^2 - \frac{c^2}{2}} = \sqrt{\frac{c^2}{2}} = \frac{c}{\sqrt{2}} = \frac{c\sqrt{2}}{2}.$$

Отже, $V = S_о \cdot H = S_о \cdot A_1F = ab \cdot \dfrac{c\sqrt{2}}{2} = \dfrac{abc\sqrt{2}}{2}$.

Відповідь. $\dfrac{abc\sqrt{2}}{2}$.

Висновок. Якщо в похилій призмі бічне ребро утворює однакові гострі кути зі сторонами основи, які мають спільну з цим ребром вершину, то основа висоти призми, проведеної з другої вершини ребра, лежить на бісектрисі кута, утвореного даними сторонами основи призми.

Це треба знати!

3. Піраміди

Пірамідою називається многогранник, одна грань якого — довільний многокутник, а інші грані — трикутники, що мають спільну вершину. Ці трикутники зі спільною вершиною називають ***бічними гранями***, їх спільну вершину — ***вершиною піраміди***. Грань, яка не є бічною, називається ***основою піраміди***.

Кожне ребро піраміди, яке не є стороною основи, називають ***бічним ребром***.

Висота піраміди — перпендикуляр, опущений із вершини піраміди на площину її основи.

Піраміда називається ***правильною***, якщо її основа — правильний многокутник, а його центр збігається з основою висоти піраміди. Усі бічні ребра правильної піраміди рівні, всі бічні грані — рівні рівнобедрені трикутники.

Висоту грані правильної піраміди, проведену з її вершини, називають ***апофемою піраміди.***

Положення висоти піраміди в деяких пірамідах

1) Якщо в піраміді всі бічні ребра рівні або нахилені до площини основи під одним кутом, або утворюють рівні кути з висотою піраміди, то основа висоти піраміди є центром кола, описаного навколо основи піраміди.
2) Якщо в деякій піраміді всі бічні грані утворюють із площиною основи один і той самий кут або якщо висоти всіх бічних граней рівні між собою, то основою висоти такої піраміди є центр кола, вписаного в основу піраміди.
3) Якщо в деякій піраміді всі бічні ребра рівні або утворюють з площиною основи один і той самий кут, то відстані від основи висоти піраміди до бічних ребер рівні між собою.
4) Якщо з основи висоти піраміди опустити перпендикуляр до бічної грані, то основа цього перпендикуляра лежить на висоті даної грані, проведеній із вершини піраміди. Кут між перпендикуляром і площиною основи дорівнює куту між перпендикуляром і проекцією зазначеної висоти на площину основи.
5) Якщо бічні грані піраміди утворюють із площиною основи один і той самий кут, то перпендикуляри, проведені з основи висоти піраміди до бічних граней, рівні між собою і утворюють однакові кути з площиною основи.

Бічна поверхня піраміди дорівнює сумі площ усіх її бічних граней.

Площа бічної поверхні правильної піраміди дорівнює добутку півпериметра її основи на апофему піраміди:

$$S_б = p \cdot l,$$

де p — півпериметр основи, l — апофема піраміди.

Бічна поверхня піраміди, у якій усі двогранні кути при основі рівні, дорівнює відношенню площі основи піраміди до косинуса лінійного кута двогранного кута при основі піраміди:

$$S_б = \frac{S_о}{\cos\varphi}.$$

Повна поверхня піраміди дорівнює сумі бічної поверхні піраміди та площі основи:

$$S_п = S_б + S_о.$$

Властивості площини, що перетинає піраміду і паралельна її основі

$$\left.\begin{array}{l} SABC\text{ – піраміда,}\\ A_1 \in SA,\\ B_1 \in SB,\\ C_1 \in SC,\\ (A_1B_1C_1) \parallel (ABC),\\ SO \perp (ABC),\\ SO_1 \perp (A_1B_1C_1) \end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{l} 1)\ \triangle A_1B_1C_1 \sim ABC;\\ 2)\ \dfrac{AA_1}{A_1S} = \dfrac{BB_1}{B_1S} = \dfrac{CC_1}{C_1S} = \dfrac{OO_1}{O_1S};\ \text{(рис. 285).}\\ 3)\ \dfrac{S_{\triangle A_1B_1C_1}}{S_{\triangle ABC}} = \dfrac{O_1S^2}{OS^2}. \end{array}$$

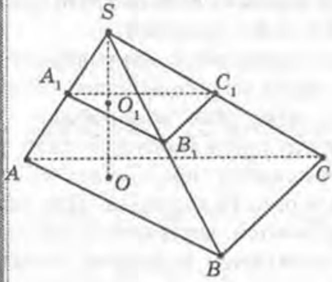


Рис. 285

1) Переріз піраміди площиною, паралельною площині основи, є многокутник, подібний основі;
2) бічні ребра й висота піраміди діляться площиною, паралельною основі, на пропорційні відрізки;
3) площі перерізу й основи відносяться як квадрати їх відстаней від вершини.

Зрізана піраміда

Частина піраміди, що міститься між її основою і січною площиною, паралельною основі, називається ***зрізаною пірамідою.***

Паралельні грані зрізаної піраміди називають її ***основами***, всі інші — ***бічними гранями.***

Висота зрізаної піраміди — відстань між площинами її основ.

Основи зрізаної піраміди — подібні многокутники, а бічні грані — трапеції.

Зрізану піраміду називають ***правильною***, якщо вона є частиною правильної піраміди.

Властивості правильної зрізаної піраміди

1) Основи — правильні многокутники.
2) Бічні ребра рівні.
3) Бічні грані рівні.
4) Апофеми рівні.
5) Двогранні кути при основі рівні.
6) Двогранні кути при бічних ребрах рівні.

7) Кожна точка осі піраміди рівновіддалена від усіх вершин основи.
8) Кожна точка осі піраміди рівновіддалена від площин бічних граней піраміди.
9) Висота дорівнює довжині відрізка осі, який міститься між основами.

Бічна поверхня правильної зрізаної піраміди дорівнює добутку півсуми периметрів на апофему.

$S_б = \frac{1}{2}(P_1 + P_2)l$, де P_1 і P_2 — периметри основ, l — апофема.

Об'єм будь-якої піраміди дорівнює одній третині добутку площі її онови на висоту:

$$V = \frac{1}{3}S_о \cdot H.$$

Об'єм зрізаної піраміди з площами основ S_1, S_2 і висотою H обчислюється за формулою:

$$V = \frac{1}{3}H\left(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1S_2}\right).$$

Самовчитель

Задача 1. В основі піраміди лежить рівнобедрений трикутник з кутом α при основі. Всі бічні ребра піраміди рівні. Площина, яка проходить через основу цього трикутника перпендикулярно до протилежного бічного ребра, утворює з площиною основи кут φ. Визначити площу перерізу, якщо висота піраміди дорівнює H.

Розв'язання.

Нехай $SABC$ — зображення даної трикутної піраміди (рис. 286), у якій $\triangle ABC$ — рівнобедрений:

$AC = BC$, $\angle A = \angle B = \alpha$.

$SC \perp (ABD)$, $SO \perp (ABC)$,

$SO = H$, $SA = SB = SC$.

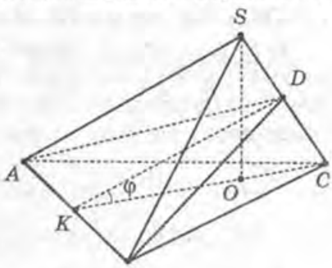


Рис. 286

Оскільки всі бічні ребра піраміди рівні, то основа висоти піраміди є центром кола, описаного навколо основи піраміди. Побудуємо $CK \perp AB$. Тоді за властивістю рівнобедреного трикутника $AK = BK$, тобто CK — серединний перпендикуляр. Отже, $O \in CK$.

Оскільки $SC \perp (ABD)$ і $AD \subset (ABD)$, $BD \subset (ABD)$, то $SC \perp BD$ і $SC \perp AD$.

Розглянемо прямокутні трикутники BDC і ADC. У них спільний катет DC, $AC = BC$. Отже, $\triangle ADC = \triangle BDC$ (за катетом і гіпотенузою). Звідси $AD = BD$ (як відповідні сторони рівних трикутників). Тому $\triangle ABD$ — рівнобедрений $(AD = BD)$.

Оскільки $AK = BK$, то за властивістю рівнобедреного трикутника $DK \perp AB$.

$$\left.\begin{array}{l} AB \text{ — лінія перетину} \\ (ABC) \text{ і } (ABD), \\ DK \subset (ABD), \\ CK \subset (ABC), \\ DK \perp AB, \\ CK \perp AB \end{array}\right\} \Rightarrow \angle DKC \text{ — кут між } (ABD) \text{ і } (ABC). \text{ За умовою задачі } \angle DKC = \varphi.$$

Розглянемо $\triangle ABC$, у ньому $\angle C = 180^\circ - 2\alpha$. За наслідком із теореми синусів маємо:

$$\frac{AB}{\sin(180^\circ - 2\alpha)} = 2R;$$

$$AB = 2R \cdot \sin(180^\circ - 2\alpha) = 2R \cdot \sin 2\alpha;$$

$$BK = \frac{1}{2} AB = R \cdot \sin 2\alpha.$$

Із прямокутного $\triangle CKB (\angle K = 90^\circ)$:

$$CK = BK \cdot \operatorname{tg}\alpha = R \cdot \sin 2\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha = \frac{2R\sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot \sin\alpha}{\cos\alpha} = 2R\sin^2\alpha;$$

Із прямокутного $\triangle KDC (\angle D = 90^\circ)$:

$$DK = CK \cdot \cos\varphi = 2R \cdot \sin^2\alpha \cdot \cos\varphi.$$

Із прямокутного $\triangle SOC (\angle O = 90^\circ)$:

$$OC = R = SO \cdot \operatorname{ctg}(90^\circ - \varphi) = H \cdot \operatorname{tg}\varphi.$$

Отже,

$$S_{\triangle ADB} = \frac{1}{2} AB \cdot DK = \frac{1}{2} \cdot 2R\sin 2\alpha \cdot 2R\sin^2\alpha \cdot \cos\varphi =$$

$$= 2R^2 \cdot \sin 2\alpha \sin^2\alpha \cdot \cos\varphi = 2H^2 \cdot \operatorname{tg}^2\varphi \cdot \sin 2\alpha \sin^2\alpha \cdot \cos\varphi.$$

Відповідь. $2H^2 \cdot \operatorname{tg}^2\varphi \cdot \sin 2\alpha \sin^2\alpha \cdot \cos\varphi$.

Задача 2. У правильній трикутній піраміді радіус кола, описаного навколо основи, дорівнює R. Визначити повну поверхню піраміди, якщо двогранний кут при основі дорівнює α.

Розв'язання.

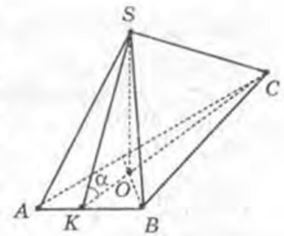


Рис. 287

Нехай (рис. 287) $SABC$ — зображення даної правильної трикутної піраміди, $SO \perp (ABC)$. Оскільки піраміда правильна, то O — центр вписаного і описаного кола, $O \in CK$, де $CK \perp AB$.

Оскільки $\triangle SAB$ — рівнобедрений, і $AK = BK$, то $SK \perp AB$.

$$\left.\begin{array}{l} AB \text{ — лінія перетину } (ABC) \text{ і } (SAB); \\ SK \subset (SAB), \\ CK \subset (ABC), \\ CK \perp AB, \\ SK \perp AB \end{array}\right\} \Rightarrow \angle SKC \text{ — лінійний кут двогранного кута при основі. За умовою задачі } \angle SKC = \alpha.$$

За наслідком із теореми синусів маємо:

$$\frac{AB}{\sin 60^\circ} = 2R; \quad AB = 2R \cdot \sin 60^\circ = 2R \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \cdot R.$$

$$S_о = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}R\right)^2 \cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot 3R^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}R^2}{4}.$$

Оскільки двогранні кути при основі піраміди рівні, то:

$$S_б = \frac{S_о}{\cos\alpha} = \frac{3\sqrt{3}R^2}{4\cos\alpha}.$$

$$S_п = S_б + S_о = \frac{3\sqrt{3}R^2}{4\cos\alpha} + \frac{3\sqrt{3}R^2}{4} = \frac{3\sqrt{3}R^2}{4}\left(\frac{1}{\cos\alpha} + 1\right).$$

Відповідь. $\frac{3\sqrt{3}R^2}{4}\left(\frac{1}{\cos\alpha} + 1\right)$.

Задача 3. В основі піраміди лежить прямокутний трикутник з кутом β. Основою висоти піраміди є вершина іншого гострого кута трикутника, з якої проведено перпендикуляр до протилежної бічної грані. Цей перпендикуляр утворює з висотою піраміди кут α, а його основа віддалена від вершини піраміди на відстань b. Визначити об'єм піраміди.

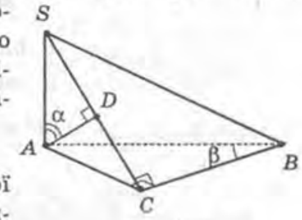


Рис. 288

Розв'язання.

Нехай $SABC$ — зображення даної піраміди (рис. 288), у якій $\triangle ABC$ — прямокутний $(\angle C = 90^\circ)$,

$$\left.\begin{array}{l}\angle B=\beta,\\ SA\perp(ACB),\\ AC \text{ — проекція похилої}\\ SC \text{ на } (ACB),\\ BC\perp AC\end{array}\right\}\Rightarrow BC\perp SC \text{ (за теоремою про три перпендикуляри).}$$

$$\left.\begin{array}{l}BC\perp SC,\\ BC\perp AC,\\ SC\subset(SAC),\\ AC\subset(SAC)\end{array}\right\}\Rightarrow BC\perp(SAC) \text{ (за ознакою перпендикулярності прямої та площини)}$$

$$\left.\begin{array}{l}BC\perp(SAC)\\ BC\subset(SCB)\end{array}\right\}\Rightarrow SAC\perp(SCB) \text{ (за ознакою перпендикулярності площин).}$$

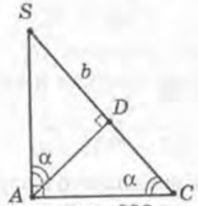


Рис. 289

$$\left.\begin{array}{l}(SAC)\perp(SCB),\\ SC \text{ — лінія перетину}\\ (SAC) \text{ і } (SCB);\\ AD\subset(SAC),\\ AD\perp SC \text{ (за побудовою)}\end{array}\right\}\Rightarrow AD\perp(SCB).$$

За умовою задачі $SD=b$, $\angle SAD=\alpha$.

Розглянемо $\triangle SAC$ і $\triangle SDA$ (рис. 289).

У них спільний $\angle S$, $\angle SAC=\angle SDA=90^\circ$.

Отже, $\triangle SAC\sim\triangle SDA$ (за двома кутами). Тому $\angle SAD=\angle ACS=\alpha$ (як відповідні кути подібних трикутників).

Із прямокутного $\triangle SDA\,(\angle D=90^\circ)$: $SA=\dfrac{b}{\sin\alpha}$.

Із прямокутного $\triangle SAC\,(\angle A=90^\circ)$: $AC=SA\cdot\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{b\operatorname{ctg}\alpha}{\sin\alpha}$.

Із прямокутного $\triangle ACB\,(\angle C=90^\circ)$:

$$BC=AC\cdot\operatorname{ctg}\beta=\frac{b\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta}{\sin\alpha}.$$

$$S_о=\frac{1}{2}AC\cdot BC=\frac{1}{2}\cdot\frac{b\operatorname{ctg}\alpha}{\sin\alpha}\cdot\frac{b\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta}{\sin\alpha}=\frac{b^2\operatorname{ctg}^2\alpha\operatorname{ctg}\beta}{2\sin^2\alpha}.$$

$$V=\frac{1}{3}S_о\cdot SA=\frac{1}{3}\cdot\frac{b^2\operatorname{ctg}^2\alpha\operatorname{ctg}\beta}{2\sin^2\alpha}\cdot\frac{b}{\sin\alpha}=\frac{b^3\operatorname{ctg}^2\alpha\operatorname{ctg}\beta}{6\sin^3\alpha}.$$

Відповідь. $\dfrac{b^3\operatorname{ctg}^2\alpha\operatorname{ctg}\beta}{6\sin^3\alpha}$.

Задача 4. Основою піраміди є прямокутний трикутник із катетом b і прилеглим до нього гострим кутом β. Дві бічні грані, що містять катети цього трикутника, перпендикулярні до основи, а третя — нахилена до неї під кутом α. Визначити бічну поверхню піраміди.

Розв'язання.

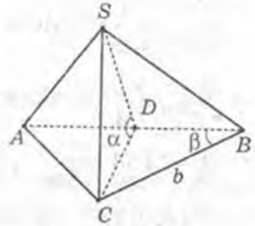


Рис. 290

Нехай $SABC$ — зображення даної піраміди (рис. 290), у якій $\triangle ACB$ — прямокутний ($\angle C=90^\circ$),

$BC=b$, $\angle ABC=\beta$;

$(SAC)\perp(ACB)$; $(SCB)\perp(ACB)$.

$$\left.\begin{array}{l}(SAC)\perp(ACB),\\ (SCB)\perp(ACB),\\ SC \text{ – лінія перетину}\\ (SAC) \text{ і } (SCB)\end{array}\right\}\Rightarrow SC\perp(ACB).$$

Побудуємо $SD\perp AB$.

$$\left.\begin{array}{l}SC\perp(ACB),\\ CD \text{ – проекція похилої}\\ SD \text{ на } (ACB),\\ AB\perp SD\end{array}\right\}\Rightarrow AB\perp CD \text{ (за теоремою про три перпендикуляри).}$$

$$\left.\begin{array}{l}AB \text{ – лінія перетину}\\ (SAB) \text{ і } (ACB),\\ SD\subset(SAB),\\ CD\subset(ACB),\\ CD\perp AB,\\ SD\perp AB\end{array}\right\}\Rightarrow \angle SDC \text{ — кут між } (SAB) \text{ і } (ACB).$$

За умовою задачі $\angle SDC=\alpha$.

Із прямокутного $\triangle ACB\,(\angle C=90^\circ)$:

$AC=b\cdot\operatorname{tg}\beta$.

Із прямокутного $\triangle CDB\,(\angle D=90^\circ)$:

$CD=b\cdot\sin\beta$.

Із прямокутного $\triangle SCD\,(\angle C=90^\circ)$:

$SC=CD\cdot\operatorname{tg}\alpha=b\sin\beta\cdot\operatorname{tg}\alpha$.

$$S_{\triangle ACB}=\frac{1}{2}AC\cdot BC=\frac{1}{2}b\operatorname{tg}\beta\cdot b=\frac{b^2\operatorname{tg}\beta}{2}.$$

Оскільки $\triangle ACB$ — ортогональна проекція $\triangle SAB$ на площину (ACB), то

$$S_{\triangle SAB}=\frac{S_{\triangle ACB}}{\cos\alpha}=\frac{b^2\operatorname{tg}\beta}{2\cos\alpha}.$$

$$S_{\triangle SCA}=\frac{1}{2}SC\cdot AC=\frac{1}{2}b\sin\beta\cdot\operatorname{tg}\alpha\cdot b\operatorname{tg}\beta=\frac{b^2\sin\beta\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}{2}.$$

$$S_{\triangle SCB}=\frac{1}{2}SC\cdot BC=\frac{1}{2}b\sin\beta\cdot\operatorname{tg}\alpha\cdot b=\frac{b^2\sin\beta\operatorname{tg}\alpha}{2}.$$

$$S_б=S_{\triangle SAB}+S_{\triangle SCA}+S_{\triangle SCB}=\frac{b^2\operatorname{tg}\beta}{2\cos\alpha}+\frac{b^2\sin\beta\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}{2}+\frac{b^2\sin\beta\operatorname{tg}\alpha}{2}=$$

$$=\frac{b^2\sin\beta}{2}\left(\frac{1}{\cos\alpha\cos\beta}+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\alpha\right).$$

Відповідь. $\frac{b^2\sin\beta}{2}\left(\frac{1}{\cos\alpha\cos\beta}+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\alpha\right)$.

Задача 5. Основою піраміди є правильний трикутник, площа якого дорівнює S. Одна бічна грань піраміди перпендикулярна до основи, а дві інші — нахилені до неї під кутом α. Визначити об'єм піраміди.

Розв'язання.

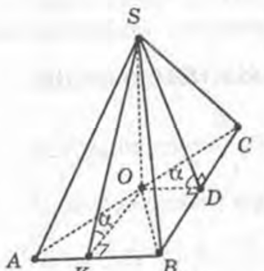


Рис. 291

Нехай $SABC$ — зображення даної піраміди (рис. 291), у якій $\triangle ABC$ — правильний,

$S_{\triangle ABC}=S$;

$(SAC)\perp(ABC)$.

Побудуємо $SO\perp AC$.

$$\left.\begin{array}{l}(SAC)\perp(ABC),\\ AC-\text{лінія перетину}\\ (SAC)\text{ і }(ABC),\\ SO\subset(SAC),\\ SO\perp AC\end{array}\right\}\Rightarrow SO\perp(ABC).$$

Побудуємо $SK\perp AB$ і $SD\perp BC$.

OK — проекція похилої SK на (ABC);

OD — проекція похилої SD на (ABC).

Тоді, за теоремою про три перпендикуляри,

$OK\perp AB$, $OD\perp BC$.

$$\left.\begin{array}{l}AB-\text{лінія перетину}\\ (SAB)\text{ і }(ABC),\\ SK\subset(SAB),\\ OK\subset(ABC),\\ SK\perp AB,\\ OK\perp AB\end{array}\right\}\Rightarrow\angle SKO-\text{кут між }(SAB)\text{ і }(ABC).$$

Аналогічно доводиться, що $\angle SDO$ — кут між (SBC) і (ABC).

За умовою задачі $\angle SKO=\angle SDO=\alpha$.

Розглянемо прямокутні трикутники SOK і SOD. У них спільний катет SO, $\angle SKO=\angle SDO$. Отже, $\triangle SOK=\triangle SOD$ (за катетом і гострим кутом). Звідси, $OK=OD$ (як відповідні сторони рівних трикутників).

Розглянемо прямокутні трикутники OKB і ODB. У них спільна гіпотенуза OB і $OK=OD$. Отже, $\triangle OKB=\triangle ODB$ (за катетом і гіпотенузою). Звідси $\angle KBO=\angle DBO$ (як відповідні кути рівних трикутників), тобто BO — бісектриса $\angle ABC$. Оскільки $\triangle ABC$ — правильний, то $AO=OC$.

Нехай сторона трикутника ABC дорівнює a, тоді

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}a^2\sin 60^\circ=\frac{a^2\sqrt{3}}{4};\ \frac{a^2\sqrt{3}}{4}=S;\ a^2\sqrt{3}=4S;$$

$$a^2=\frac{4S}{\sqrt{3}};\ a=2\sqrt{\frac{S}{\sqrt{3}}}.\ \text{Отже, }\ AO=OC=\sqrt{\frac{S}{\sqrt{3}}}.$$

Із прямокутного $\triangle ODC\ (\angle D=90^\circ)$:

$$OD=OC\cdot\sin 60^\circ=\sqrt{\frac{S}{\sqrt{3}}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{3}S}.$$

Із прямокутного $\triangle SOD\ (\angle O=90^\circ)$:

$$SO=OD\cdot\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{3}S}\cdot\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sqrt[4]{3}}{2}\sqrt{S}\cdot\operatorname{tg}\alpha.$$

Отже,

$$V=\frac{1}{3}\cdot S_о\cdot H=\frac{1}{3}S\cdot SO=\frac{1}{3}S\cdot\frac{\sqrt[4]{3}}{2}\cdot\sqrt{S}\cdot\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sqrt[4]{3}}{6}\sqrt{S^3}\cdot\operatorname{tg}\alpha.$$

Відповідь. $\frac{\sqrt[4]{3}}{6}\sqrt{S^3}\cdot\operatorname{tg}\alpha$.

Висновок. Якщо в трикутній піраміді одна бічна грань перпендикулярна до площини основи, то висота даної піраміди є висотою перпендикулярної до основи грані, опущеної з вершини піраміди. Якщо дві інші бічні грані нахилені до основи піраміди під однаковими кутами, то основа висоти піраміди належить бісектрисі трикутника, який є основою даної піраміди.

Задача 6. Основою піраміди є рівнобедрений трикутник із бічною стороною b і кутом β при основі. Бічна грань, що містить бічну сторону цього трикутника, перпендикулярна до основи, а дві інші — нахилені до неї під кутом α. Визначити бічну поверхню піраміди.

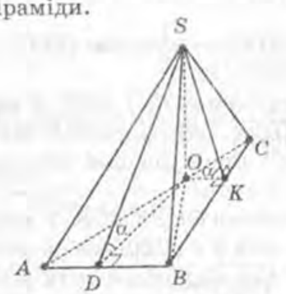


Рис. 292

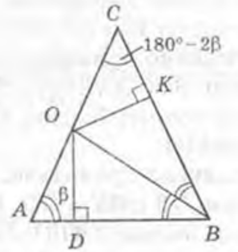


Рис. 293

Розв'язання.

Нехай $SABC$ — зображення даної піраміди (рис. 292), у якій $\triangle ABC$ — рівнобедрений $(AC = BC = b)$, $\angle A = \angle B = \beta$ (рис. 293), $(SAC) \perp (ABC)$.

Побудуємо $SO \perp AC$.

$$\left.\begin{array}{l} (SAC) \perp (ABC), \\ AC - \text{лінія перетину} \\ (SAC) \text{ і } (ABC), \\ SO \subset (SAC), \\ SO \perp AC \end{array}\right\} \Rightarrow SO \perp (ABC).$$

Отже, SO — висота даної піраміди.

Побудуємо $SD \perp AB$ і $SK \perp BC$, тоді OD — проекція похилої SD на площину (ABC), OK — проекція похилої SK на площину (ABC).

За теоремою про три перпендикуляри $OD \perp AB$, $OK \perp BC$.

$$\left.\begin{array}{l} AB - \text{лінія перетину} \\ (SAB) \text{ і } (ABC), \\ SD \subset (SAB), \\ OD \subset (ABC), \\ SD \perp AB, \\ OD \perp AB \end{array}\right\} \Rightarrow \angle SDO \text{ — кут між площинами } (SAB) \text{ і } (ABC).$$

За умовою задачі $\angle SDO = \alpha$.

$$\left.\begin{array}{l} BC - \text{лінія перетину} \\ (SBC) \text{ і } (ABC), \\ SK \subset (SBC), \\ OK \subset (ABC), \\ SK \perp BC, \\ OK \perp BC \end{array}\right\} \Rightarrow \angle SKO \text{ — кут між площинами } (SBC) \text{ і } (ABC).$$

За умовою задачі $\angle SKO = \alpha$.

Оскільки $(SAC) \perp (ABC)$, а площини (SAB) і (SBC) утворюють з площиною основи однакові кути, то BO — бісектриса $\angle ABC$.

За властивістю бісектриси трикутника маємо:

$$\frac{AO}{OC} = \frac{AB}{BC}.$$

Нехай $OC = x$, тоді $AO = b - x$.

AB знайдемо з $\triangle ABC$ за теоремою синусів:

$$\frac{AB}{\sin(180^\circ - 2\beta)} = \frac{BC}{\sin\beta}; \quad \frac{AB}{\sin 2\beta} = \frac{b}{\sin\beta};$$

$$AB = \frac{b\sin 2\beta}{\sin\beta} = \frac{2b\sin\beta\cos\beta}{\sin\beta} = 2b\cos\beta.$$

Отже, $\dfrac{b-x}{x} = \dfrac{2b\cos\beta}{b}$;

$2x\cos\beta = b - x$; $\quad 2x\cos\beta + x = b$;

$$x(2\cos\beta + 1) = b; \quad x = \frac{b}{2\cos\beta + 1}; \quad OC = \frac{b}{2\cos\beta + 1}.$$

Із прямокутного $\triangle CKO\,(\angle K = 90^\circ)$:

$$OK = OC \cdot \sin(180^\circ - 2\beta) = \frac{b\sin 2\beta}{2\cos\beta + 1}.$$

Із прямокутного $\triangle SOK\,(\angle O = 90^\circ)$:

$$SO = OK \cdot \operatorname{tg}\alpha = \frac{b\sin 2\beta \cdot \operatorname{tg}\alpha}{2\cos\beta + 1}.$$

Оскільки $\triangle AOB$ — ортогональна проекція $\triangle SAB$ на площину (ABC), то $S_{\triangle SAB} = \dfrac{S_{\triangle AOB}}{\cos\alpha}$.

Оскільки $\triangle BOC$ — ортогональна проекція $\triangle SBC$ на площину (ABC), то $S_{\triangle SBC} = \dfrac{S_{\triangle BOC}}{\cos\alpha}$.

$$S_{\triangle SAB} + S_{\triangle SBC} = \frac{1}{\cos\alpha}\left(S_{\triangle AOB} + S_{\triangle BOC}\right) = \frac{S_{\triangle ABC}}{\cos\alpha} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2}AC\cdot BC\cdot\sin\left(180^\circ - 2\beta\right)}{\cos\alpha} = \frac{b^2\sin 2\beta}{2\cos\alpha}.$$

$$S_б = S_{\triangle SAB} + S_{\triangle SBC} + S_{\triangle SAC} = \frac{b^2\sin 2\beta}{2\cos\alpha} + \frac{1}{2}AC\cdot SO =$$

$$= \frac{b^2\sin 2\beta}{2\cos\alpha} + \frac{b^2\sin 2\beta\,\mathrm{tg}\,\alpha}{2\left(2\cos\beta+1\right)} = \frac{b^2\sin 2\beta}{2}\left(\frac{1}{\cos\alpha} + \frac{\mathrm{tg}\,\alpha}{2\cos\beta+1}\right).$$

Відповідь. $\frac{b^2\sin 2\beta}{2}\left(\frac{1}{\cos\alpha} + \frac{\mathrm{tg}\,\alpha}{2\cos\beta+1}\right)$.

Задача 7. У правильній чотирикутній зрізаній піраміді сторони основ дорівнюють a і b, діагональ піраміди утворює з площиною основи кут 30°. Знайти об'єм піраміди.

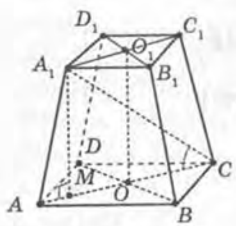


Рис. 294

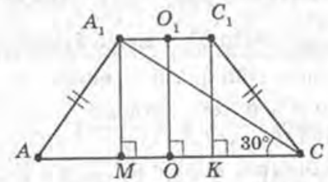


Рис.295

Розв'язання.

Нехай $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — зображення даної зрізаної піраміди (рис. 294), у якій $AB = a$, $A_1B_1 = b$, A_1C — діагональ, $A_1M_1 \perp AC$. Оскільки MC — проекція похилої A_1C на площину (ABC), то $\angle A_1CM$ — кут, який утворює A_1C із площиною (ABC). За умовою задачі $\angle A_1CM = 30^\circ$.

OO_1 — висота піраміди.

$AC^2 = AB^2 + BC^2;$

$AC^2 = a^2 + a^2;\ \ AC^2 = 2a^2;\ \ AC = a\sqrt{2}.$

$A_1C_1^2 = A_1B_1^2 + B_1C_1^2;$

$A_1C_1^2 = b^2 + b^2,\ \ A_1C_1^2 = 2b^2;\ \ A_1C_1 = b\sqrt{2}.$

Розглянемо рівнобічну трапецію $AA_1C_1C\left(AA_1 = CC_1\right)$ (рис. 295).

$$AM = KC = \frac{AC - A_1C_1}{2} = \frac{a\sqrt{2} - b\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}\left(a-b\right)}{2};$$

$$MC = MK + KC = b\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}\left(a-b\right)}{2} = \frac{2b\sqrt{2} + \sqrt{2}\left(a-b\right)}{2} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}\left(2b+a-b\right)}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(a+b\right);$$

Із прямокутного $\triangle A_1MC\left(\angle M = 90^\circ\right)$:

$$A_1M = MC\cdot\mathrm{tg}\,30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(a+b\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{6}}{6}\left(a+b\right).$$

Отже, $V = \frac{1}{3}\cdot A_1M\left(S_{ABCD} + S_{A_1B_1C_1D_1} + \sqrt{S_{ABCD}\cdot S_{A_1B_1C_1D_1}}\right) =$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{6}}{6}\left(a+b\right)\left(a^2+b^2+\sqrt{a^2b^2}\right) = \frac{\sqrt{6}}{18}\left(a+b\right)\left(a^2+ab+b^2\right).$$

Відповідь. $\frac{\sqrt{6}}{18}\left(a+b\right)\left(a^2+ab+b^2\right)$.

Задача 8. У трикутній зрізаній піраміді через сторону верхньої основи проведено площину паралельно протилежному бічному ребру. У якому відношенні розділиться об'єм зрізаної піраміди, якщо відповідні сторони основ відносяться як 1 : 2?

Розв'язання.

Нехай $ABCA_1B_1C_1$ — зображення даної зрізаної піраміди (рис. 296), у якій $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{1}{2}$, $S_{\triangle ABC} = S_1$, $S_{\triangle A_1B_1C_1} = S_2$.

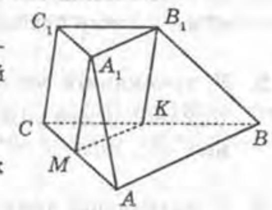


Рис. 296

Оскільки площі основ відносяться як квадрати відповідних сторін, то $\frac{S_2}{S_1} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$. Звідси $S_1 = 4S_2$.

Тоді об'єм зрізаної піраміди дорівнює:

$$V = \frac{1}{3}H\left(S_1 + \sqrt{S_1S_2} + S_2\right) = \frac{1}{3}H\left(4S_2 + \sqrt{4S_2^2} + S_2\right) =$$

$$= \frac{1}{3}H\left(5S_2 + 2S_2\right) = \frac{1}{3}H\cdot 7S_2 = \frac{7}{3}HS_2.$$

Об'єм V_2 частини, що залишилася, дорівнює:

$V_2 = V - V_1$, де V_1 — об'єм похилої призми $CMKC_1A_1B_1$.

$$V_2 = \frac{7}{3}HS_2 - HS_2 = \frac{4}{3}HS_2.$$

Тоді $\frac{V_2}{V_1} = \frac{\frac{4}{3}HS_2}{HS_2} = \frac{4}{3}$.

Відповідь. 4 : 3.

Перевір себе

Задачі для самостійного розв'язування

1. Висота правильної чотирикутної піраміди дорівнює 15 см, апофема — 17 см. Знайти об'єм та бічну поверхню піраміди.

2. Основою піраміди є ромб з діагоналями 6 см і 8 см. Висота піраміди проходить через точку перетину діагоналей ромба й дорівнює 1 см. Знайти повну поверхню піраміди.

3. Основа піраміди — рівнобедрений трикутник зі сторонами 40 см, 25 см і 25 см. Її висота проходить через вершину кута, протилежного більшій стороні, і дорівнює 8 см. Знайти бічну поверхню піраміди.

4. Висота правильної чотирикутної піраміди дорівнює 3 см. Бічна грань нахилена до площини основи під кутом 45°. Знайти об'єм і повну поверхню піраміди.

5. У правильній чотирикутній піраміді бічне ребро дорівнює $6\sqrt{2}$ см, а кут між бічним ребром і площиною основи дорівнює 45°. Знайти об'єм піраміди.

6. У правильній трикутній піраміді сторона основи дорівнює a, плоский кут при вершині дорівнює α. Знайти об'єм піраміди.

7. Бічне ребро правильної трикутної піраміди дорівнює l і утворює з площиною основи кут α. Знайти об'єм піраміди.

8. Довжина сторони основи правильної трикутної піраміди дорівнює 10 см, а двогранний кут при основі — 30°. Знайти об'єм піраміди.

9. Основою піраміди є прямокутний трикутник з гіпотенузою c і гострим кутом α. Знайти об'єм піраміди, якщо бічні ребра нахилені до площини основи під кутом β.

10. Знайти об'єм трикутної піраміди, два кути основи якої дорівнюють α і β, а радіус кола, описаного навколо основи, дорівнює R. Бічні ребра нахилені до площини основи під кутом φ.

11. Основою піраміди є рівнобедрений трикутник із кутом 2α при вершині. Кожна бічна грань нахилена до площини основи під кутом β, а висота піраміди дорівнює H. Знайти об'єм піраміди.

12. Основою піраміди є прямокутний трикутник із гіпотенузою c і гострим кутом α. Кожна бічна грань нахилена до площини основи під кутом β. Знайти площу повної поверхні піраміди.

13. Знайти бічну поверхню правильної трикутної піраміди, якщо сторона основи дорівнює a, а бічне ребро утворює з площиною основи кут α.

14. Плоский кут при вершині правильної трикутної піраміди дорівнює α, а бічне ребро дорівнює b. Знайти повну поверхню піраміди.

15. Основою піраміди є рівнобічна трапеція, діагональ якої дорівнює d і утворює з більшою основою кут α. Всі бічні грані піраміди нахилені до площини основи під кутом φ. Знайти повну поверхню піраміди.

16. Бічне ребро правильної трикутної піраміди дорівнює 10 см, сторона основи — 12 см. Знайти відстань від центра основи піраміди до середини апофеми.

17. Основою піраміди є рівносторонній трикутник зі стороною a. Одна з бічних граней (також рівносторонній трикутник) перпендикулярна до площини основи. Знайти бічну поверхню піраміди.

18. Знайти висоту піраміди, якщо її основою є прямокутник, одне із бічних ребер перпендикулярне до площини основи, а довжини інших ребер дорівнюють 7, 8 і 4 см.

19. Основою піраміди є прямокутник із меншою стороною a. Знайти об'єм піраміди, якщо дві бічні грані піраміди перпендикулярні до основи, а дві інші нахилені до неї під кутом 30° і 60°.

20. Основою чотирикутної піраміди є ромб зі стороною a і гострим кутом α. Всі бічні грані нахилені до площини основи під кутом β. Знайти повну поверхню піраміди.

21. Основою піраміди є правильний трикутник зі сторонами a. Дві бічні грані піраміди перпендикулярні до основи, а третя — нахилена до неї під кутом β. Визначити бічну поверхню піраміди.

22. Основа піраміди — прямокутний трикутник із гострим кутом β, висота цього трикутника, проведена до гіпотенузи, дорівнює h. Бічна грань, що містить катет, прилеглий до даного кута, перпендикулярна до основи, а дві інші — нахилені до неї під кутом α. Знайти об'єм піраміди.

23. Основою піраміди є прямокутний трикутник із гіпотенузою c і гострим кутом β. Бічна грань, що містить гіпотенузу, перпендикулярна до основи, а дві інші — нахилені до неї під кутом α. Визначити бічну поверхню піраміди.

24. Основою піраміди є рівнобедрений трикутник з основою a і кутом α при вершині. Бічна грань, що містить основу цього трикутника, перпендикулярна до основи, а дві інші — нахилені до неї під кутом β. Визначити бічну поверхню піраміди.

25. В основі піраміди лежить рівнобедрений трикутник із кутом β при основі й радіусом вписаного кола r. Дві нерівні бічні грані перпендикулярні до основи, а третя — нахилена до неї під кутом α. Визначити об'єм піраміди.

26. Кожне з бічних ребер піраміди дорівнює b. Її основою є прямокутний трикутник, катети якого відносяться, як $m : n$, а гіпотенуза дорівнює c. Знайти об'єм піраміди.

27. Знайти об'єм правильної трикутної піраміди, висота якої дорівнює H, а плоскі кути при вершині прямі.

28. Знайти об'єм правильної трикутної піраміди, у якій плоский кут при вершині дорівнює $90°$, а сторона основи дорівнює 3 см.

29. Знайти бічну поверхню правильної трикутної піраміди, якщо плоский кут при її вершині дорівнює $90°$, а площа основи дорівнює S.

30. В основі піраміди лежить рівнобедрений трикутник з основою a і бічною стороною b. Бічні грані утворюють з основою двогранні кути, що дорівнюють α. Знайти висоту піраміди.

31. В основі піраміди лежить прямокутний трикутник із гіпотенузою c і гострим кутом α. Кожна з бічних граней піраміди нахилена до основи під кутом β. Знайти бічну поверхню піраміди.

32. Основа піраміди $SABCD$ — прямокутник $ABCD$, бічна грань ASB перпендикулярна до площини основи, грані CSB і ASD нахилені до площини основи під кутом β, а грань CSD — під кутом φ. Знайти об'єм піраміди, якщо $AB = 2a$.

33. У правильній чотирикутній зрізаній піраміді сторона більшої основи дорівнює a, а сторона меншої основи дорівнює b. Бічне ребро утворює з основою кут $45°$. Знайти бічне ребро піраміди.

34. У правильній зрізаній чотирикутній піраміді сторони основ дорівнюють a і b, а площа бічної поверхні дорівнює половині площі повної поверхні. Знайти об'єм піраміди.

35. Площі основ зрізаної піраміди відносяться як 1 : 4. Більшою основою є ромб із діагоналями 8 дм і 6 дм. Одне з бічних ребер перпендикулярне до площини основи і дорівнює 7 см. Знайти площу поверхні піраміди.

36. Сторони основ правильної чотирикутної зрізаної піраміди дорівнюють a і $a\sqrt{3}$, бічна грань нахилена до площини основи під кутом φ. Знайти об'єм і повну поверхню зрізаної піраміди.

§ 5. Тіла обертання

1. Циліндр

Це треба знати!

Циліндром (прямим круговим циліндром) називається тіло, утворене обертанням прямокутника навколо його сторони (рис. 297).

Сторони OA і O_1B описують рівні круги, які лежать у паралельних площинах і називаються ***основами циліндра***.

Радіуси кругів називаються ***радіусами циліндра***. Сторона AB описує поверхню, яка називається ***бічною поверхнею циліндра***.

Відрізки бічної поверхні, які паралельні і дорівнюють AB, називаються ***твірними циліндра***. OO_1 — ***вісь циліндра***.

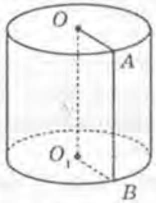


Рис. 297

Висотою циліндра називається відрізок, перпендикулярний основам, кінці якого належать основам. Висота циліндра дорівнює його твірній.

Переріз циліндра площиною, перпендикулярною його осі, є круг, рівний основі, а переріз циліндра площиною, паралельною осі, — прямокутник (або відрізок).

Осьовий переріз— прямокутник зі сторонами, рівними висоті циліндра і діаметру його основи.

Об'єм циліндра дорівнює добутку площі основи на висоту.

$$V = S_о \cdot H = \pi R^2 H,$$

де R — радіус основи, H — висота циліндра.

Площа бічної поверхні обчислюється за формулою:

$$S_б = C \cdot H = 2\pi RH,$$

де R — радіус основи циліндра, H — його висота.

Площа повної поверхні циліндра обчислюється за формулою:

$$S_п = S_б + 2S_о,$$

де $S_б$ — площа бічної поверхні циліндра, $S_о$ — площа основи циліндра.

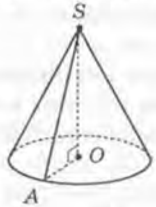


Рис. 298

2. Конус

Конусом (прямим круговим конусом) називається тіло, утворене обертанням прямокутного трикутника навколо одного із його катетів (рис. 298).

Якщо прямокутний трикутник SAO обертається навколо катета SO, то його гіпотенуза SA описує бічну поверхню, а катет OA — круг, який є ***основою конуса***. Радіус цього круга називається ***радіусом конуса***; точку S — ***вершиною конуса***, відрізок SA — ***твірною конуса***, відрізок SO — ***висотою конуса*** (або ***віссю***).

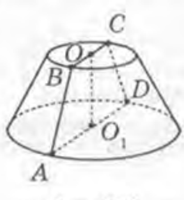


Рис. 299

Осьові перерізи конуса — рівнобедрені трикутники, які рівні між собою.

Переріз конуса площиною, паралельною площині основі, є круг.

Зрізаним конусом називається частина конуса, обмежена його основою і перерізом, паралельним площині основи (рис. 299).

Осьовий переріз зрізаного конуса — рівнобічна трапеція.

Зрізаний конус обмежений двома кругами (***його основами***) та ***бічною поверхнею***.

Відстань між основами — ***висота зрізаного конуса.***

Об'єм конуса дорівнює одній третині добутку площі основи на висоту конуса.

$$V = \frac{1}{3}S_о \cdot H = \frac{1}{3}\pi R^2 H,$$

де R — радіус основи конуса, H — висота конуса.

Об'єм зрізаного конуса з радіусами основ R_1, R_2 та висотою H обчислюється за формулою:

$$V = \frac{1}{3}\pi H(R_1^2 + R_1 R_2 + R_2^2).$$

Площа бічної поверхні конуса обчислюється за формулою:

$$S_б = \pi Rl,$$

де R — радіус основи конуса, l — довжина твірної конуса.

Площа бічної поверхні зрізаного конуса обчислюється за формулою:

$$S_б = \pi\,(R_1 + R_2) \cdot l,$$

де R_1, R_2 — радіуси основ, l — довжина твірної.

3. Сфера та куля

Сферою називається (рис. 300) поверхня, яка складається з усіх точок простору, що розміщені на даній відстані (***радіус***) від даної точки (***центр***). R — радіус сфери.

Відрізок, який з'єднує дві точки сфери і проходить через її центр, називається ***діаметром сфери.*** Сферу можна отримати в результаті обертання кола навколо його діаметра.

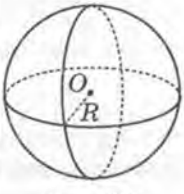


Рис. 300

Куля — тіло, яке містить всі точки простору, що розміщені на відстані, не більшій за дану (***радіус***), від даної точки (***центр*** кулі). Кулю можна отримати в результаті обертання круга навколо його діаметра.

Будь-який переріз кулі площиною є круг, центром якого є основа перпендикуляра, опущеного з центра кулі на січну площину.

Площина (пряма), що має з кулею тільки одну спільну точку, називається ***дотичною площиною*** (***прямою***). Дотична площина (пряма) перпендикулярна до радіуса кулі, проведеного в точку дотику.

Площа сфери радіуса R обчислюється за формулою:

$$S = 4\pi R^2.$$

Об'єм кулі радіуса R обчислюється за формулою:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

4. Комбінації многогранників та тіл обертання

Піраміда, вписана в конус

Пірамідою, вписаною в конус (рис. 301), називається така піраміда, основою якої є многокутник, вписаний у коло основи конуса, а вершина збігається з вершиною конуса.

Властивості піраміди, вписаної в конус:

1) Бічними ребрами піраміди, вписаної в конус, є твірні конуса.
2) Бічні ребра піраміди, вписаної в конус, рівні.
3) Висота піраміди, вписаної в конус, збігається з висотою конуса.
4) Якщо у піраміди всі бічні ребра рівні, то вона є вписаною у деякий конус.

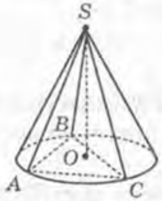


Рис. 301

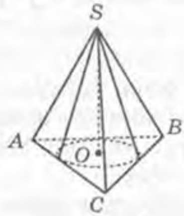


Рис. 302

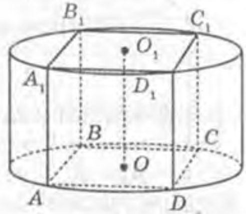


Рис. 303

Піраміда, описана навколо конуса

Пірамідою, описаною навколо конуса (рис. 302), називається піраміда, основою якої є многокутник, описаний навколо основи конуса, а вершина збігається з вершиною конуса.

Властивості піраміди, описаної навколо конуса

1) Висота піраміди, описаної навколо конуса, збігається з висотою конуса.
2) Площини бічних граней описаної піраміди є дотичними до конуса площинами.
3) Дотична площина до конуса проходить через його твірну і перпендикулярна до площини осьового перерізу, проведеного через дану твірну.

Призма, вписана в циліндр

Призма називається ***вписаною в циліндр*** (рис. 303), якщо її основи вписані в основи циліндра.

Властивості призми, вписаної в циліндр

1) Бічні ребра призми, вписаної в циліндр є твірними циліндра.
2) Висота призми, вписаної в циліндр, збігається з висотою циліндра.

Призма, описана навколо циліндра

Призма називається ***описаною навколо циліндра*** (рис. 304), якщо її основи описані навколо основ циліндра.

Властивості призми, описаної навколо циліндра

1) Висота призми, описаної навколо циліндра, збігається з висотою циліндра.
2) Площини бічних граней описаної призми є дотичними до циліндра площинами.

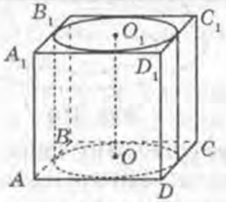


Рис. 304

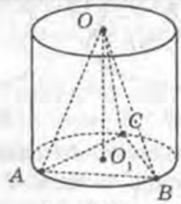


Рис. 305

Піраміда називається ***вписаною в циліндр*** (рис. 305), якщо основа піраміди вписана в одну основу циліндра, а вершина лежить в другій основі циліндра.

Циліндр називається ***вписаним у піраміду*** (рис. 306), якщо одна основа циліндра лежить в основі піраміди, а друга основа вписана в переріз піраміди площиною, яка проходить через цю основу циліндра паралельно основі піраміди.

Рис. 306

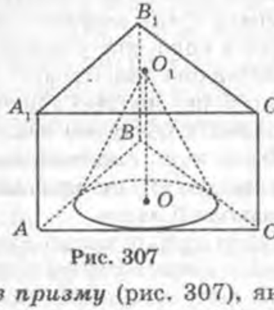


Рис. 307

Конус називається ***вписаним в призму*** (рис. 307), якщо його основа вписана в одну із основ призми, а вершина лежить у другій основі.

Призма називається ***вписаною в конус*** (рис. 308), якщо одна із основ призми лежить в основі конуса, а друга основа вписана в переріз конуса площиною, яка проходить через цю основу призми паралельно основі конуса.

Конус називається ***вписаним у циліндр*** (рис. 309), якщо основа конуса збігається з однією з основ циліндра, а вершина конуса лежить у другій основі циліндра.

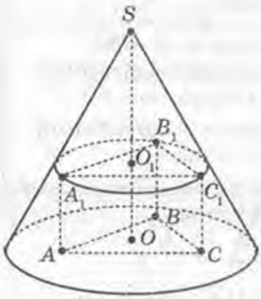


Рис. 308

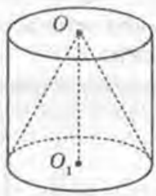


Рис. 309

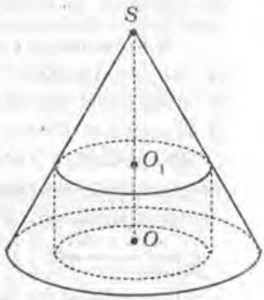


Рис. 310

Циліндр називається ***вписаним у конус*** (рис. 310), якщо одна із основ циліндра лежить в основі конуса, а коло другої основи циліндра лежить на бічній поверхні конуса.

Призма, вписана в кулю

Призма називається ***вписаною в кулю*** (рис. 311), якщо всі її вершини лежать на поверхні кулі.

Властивості призми, вписаної в кулю

1) Усі вершини вписаної призми рівновіддалені від центра кулі.
2) Якщо призма вписана в кулю, то вона пряма.
3) Кожна грань вписаної призми є прямокутником, вписаним в коло, яке утворюється внаслідок перетину сфери площиною даної грані; при цьому основи перпендикулярів, що опущені з центра описаної сфери на площини граней, є центрами описаних навколо граней кіл.
4) Центр кулі, описаної навколо призми, є серединою висоти призми, що проходить через центри кіл, описаних навколо її основ.
5) Центр кулі, описаної навколо прямокутного паралелепіпеда, лежить у точці перетину діагоналей паралелепіпеда, тобто на середині будь-якої його діагоналі, а кожна діагональ паралелепіпеда є діаметром описаної кулі.

Піраміда, вписана в кулю

Піраміда називається ***вписаною в кулю*** (рис. 312), якщо всі її вершини лежать на поверхні кулі.

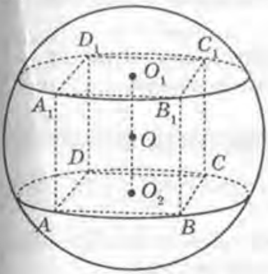


Рис. 311

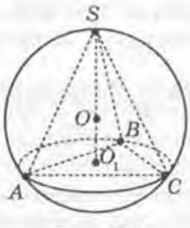


Рис. 312

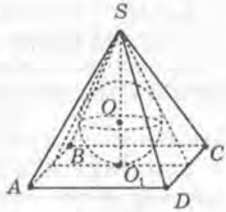


Рис. 313

Властивості піраміди, вписаної в кулю

1) Усі вершини вписаної піраміди рівновіддалені від центра кулі.
2) Кожна грань вписаної піраміди є трикутником, вписаним в коло, яке утворюється внаслідок перетину сфери площиною даної грані; при цьому основи перпендикулярів, що опущені з центра описаної сфери на площини граней, є центрами описаних навколо граней кіл.
3) Якщо бічне ребро піраміди і перпендикуляр, проведений до її основи через центр описаного кола, не є мимобіжними прямими, то центр описаної кулі є точкою перетину даного перпендикуляра із серединним перпендикуляром до бічного ребра піраміди, проведеним у площині, що проходить через бічне ребро і вищезазначений перпендикуляр до основи піраміди.
4) У загальному випадку центр описаної кулі лежить на прямій, перпендикулярній до площини основи піраміди, яка проходить через центр описаного кола, у точці перетину цієї прямої з площиною, перпендикулярною до бічного ребра, яка проходить через середину цього ребра.

Куля, вписана в піраміду

Піраміда називається (рис. 313) ***описаною навколо кулі***, якщо її грані дотикаються до поверхні кулі.

Властивості піраміди, описаної навколо кулі

1) Якщо вершина описаної піраміди проектується в центр кола, вписаного в основу, то центр вписаної кулі

розміщений у точці перетину висоти піраміди і бісектриси лінійного кута двогранного кута при її основі; при цьому лінійний кут має бути побудованим в одній площині з висотою піраміди.

2) У загальному випадку центр кулі, вписаної в піраміду, є точкою перетину бісектрис півплощин двогранних кутів при ребрах піраміди.

Куля, вписана в призму

Призма називається ***описаною навколо кулі*** (рис. 314), якщо всі її грані дотикаються до поверхні кулі.

Властивості призми, описаної навколо кулі

1) Якщо в призму вписана куля, то в її перпендикулярний переріз можна вписати коло, і висота призми дорівнює діаметру кола, вписаного в перпендикулярний переріз, або діаметру вписаної кулі. Центр вписаної кулі розміщений на середині висоти призми, що проходить через центр кола, вписаного в перпендикулярний переріз призми.
2) Центр кулі, вписаної в пряму призму, є серединою висоти призми, що проходить через центр кола, вписаного в основу призми.

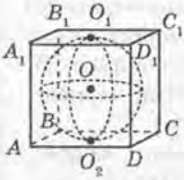


Рис. 314

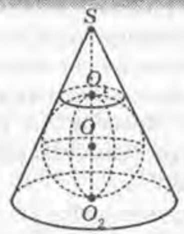


Рис. 315

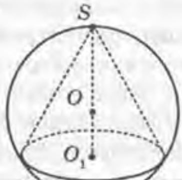


Рис. 316

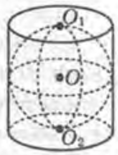


Рис. 317

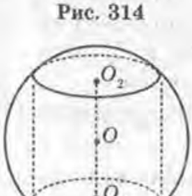


Рис. 318

Куля називається ***вписаною в конус*** (рис. 315), якщо вона дотикається до основи конуса в його центрі і до кожної його твірної.

Куля називається ***описаною навколо конуса*** (рис. 316), якщо вершина і коло основи конуса лежать на поверхні кулі.

Куля називається ***вписаною в циліндр*** (рис. 317), якщо вона дотикається до обох основ циліндра в їх центрах і до кожної його твірної.

Куля називається ***описаною навколо циліндра*** (рис. 318), якщо кола основ циліндра лежать на поверхні кулі.

Самовчитель

Задача 1. У циліндрі площа перерізу, перпендикулярного твірній, дорівнює S, а площа осьового перерізу дорівнює Q. Знайти повну поверхню і об'єм даного циліндра.

Розв'язання.

Нехай прямокутник $ABCD$ — осьовий переріз даного циліндра (рис. 319), $AO = R$, $AB = H$.

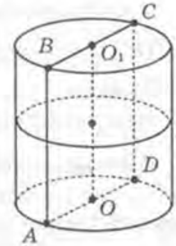


Рис. 319

Переріз циліндра площиною, перпендикулярною твірній, є круг, площина якого паралельна основам циліндра. Отже, площа цього перерізу дорівнює площі основ циліндра.

За умовою задачі: $\begin{cases} \pi R^2 = S, \\ 2RH = Q; \end{cases}$

$$R^2 = \frac{S}{\pi};\ \ R = \sqrt{\frac{S}{\pi}};\ \ 2\sqrt{\frac{S}{\pi}} \cdot H = Q;\ \ H = \frac{Q}{2} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{S}};$$

$$S_п = S_б + 2S_о = 2\pi RH + 2\pi R^2 = 2\pi R(H + R) =$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{S}{\pi}}\left(\frac{Q}{2}\sqrt{\frac{\pi}{S}} + \sqrt{\frac{S}{\pi}}\right) = \pi Q + 2S;$$

$$V = \pi R^2 \cdot H = \pi \cdot \frac{S}{\pi} \cdot \frac{Q}{2} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{S}} = \frac{Q}{2}\sqrt{\pi S}.$$

Відповідь. $\pi Q + 2S;\ \ \frac{Q}{2}\sqrt{\pi S}.$

Задача 2. У циліндрі з основою радіуса R паралельно до його осі проведено площину, яка перетинає нижню основу по хорді, яку видно із центра цієї основи під кутом 2α. Відрізок, який з'єднує центр верхньої основи циліндра з точкою кола нижньої основи, утворює з площиною основи кут β. Знайти площу перерізу.

Розв'язання.

Нехай OO_1 — вісь циліндра (рис. 320), $ABCD$ — його переріз;

$OA = OB = R;\ \ \angle AOB = 2\alpha.$

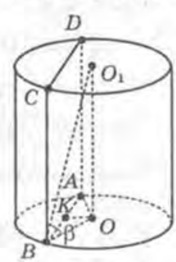


Рис. 320

Оскільки OB — проекція похилої O_1B на площину основи, то $\angle O_1BO$ — кут між O_1B та площиною основи циліндра. За умовою задачі $\angle O_1BO = \beta$.

Оскільки $OO_1 \parallel (ABC)$, то $ABCD$ — прямокутник.

Побудуємо $OK \perp AB$, тоді з $\triangle AOK\ (\angle K = 90^\circ)$:

$AK = AO \cdot \sin\alpha = R\sin\alpha$;

$AB = 2AK = 2R\sin\alpha$;

З прямокутного $\triangle O_1OB\ (\angle O = 90^\circ)$:

$OO_1 = OB \cdot \operatorname{tg}\beta = R \cdot \operatorname{tg}\beta$.

Отже,

$S_{ABCD} = AB \cdot AD = AB \cdot OO_1 = 2R\sin\alpha \cdot R \cdot \operatorname{tg}\beta = 2R^2 \sin\alpha \operatorname{tg}\beta$.

Відповідь. $2R^2 \sin\alpha \operatorname{tg}\beta$.

Задача 3. Висота циліндра H, радіус основи R. Кінці даного відрізка лежать на колах обох основ, довжина відрізка дорівнює l. Знайти відстань від цього відрізка до осі циліндра.

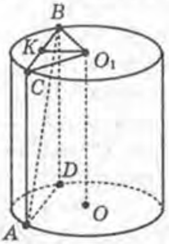


Рис. 321

Розв'язання.

Нехай $OO_1 = H$, $OA = R$, $AB = l$ (рис. 321). Через відрізок AB проведемо переріз циліндра $ACBD$, паралельний до осі OO_1 циліндра. Оскільки прямі AB і OO_1 — мимобіжні, то відстань між ними дорівнює відстані між прямою OO_1 і площиною (ABC), тобто довжині перпендикуляра, опущеного з будь-якої точки прямої OO_1 на площину (ABC). Побудуємо $O_1K \perp BC$, тоді

$$\left.\begin{array}{l} (ABC) \perp (BO_1C), \\ BC - \text{лінія перетину} \\ (ABC) \text{ і } (BO_1C), \\ O_1K \subset (BO_1C), \\ O_1K \perp BC \end{array}\right\} \Rightarrow O_1K \perp (ABC),$$

тобто O_1K — відстань між мимобіжними прямими AB і OO_1.

Із $\triangle BDA\ (\angle D = 90^\circ)$ за наслідком із теореми Піфагора маємо:

$AD^2 = AB^2 - BD^2$; $\quad AD^2 = l^2 - H^2$;

$AD = \sqrt{l^2 - H^2}$; $AD = BC = \sqrt{l^2 - H^2}$.

Оскільки трикутник CBO_1 — рівнобедрений, то O_1K — висота і медіана.

Із $\triangle O_1KB\ (\angle K = 90^\circ)$ за наслідком з теореми Піфагора маємо:

$O_1K^2 = BO_1^2 - BK^2$;

$$O_1K^2 = R^2 - \left(\frac{\sqrt{l^2 - H^2}}{2}\right)^2;$$

$$O_1K^2 = R^2 - \frac{l^2 - H^2}{4} = \frac{4R^2 - l^2 + H^2}{4};$$

$$O_1K = \frac{\sqrt{4R^2 - l^2 + H^2}}{2}.$$

Відповідь. $\frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - l^2 + H^2}$.

Задача 4. Трикутник, одна сторона якого дорівнює c, а прилеглі кути α і β, обертається навколо даної сторони. Знайти об'єм і площу поверхні тіла обертання.

Розв'язання.

Нехай $AB = c$, $\angle CAB = \alpha$;

$\angle CBA = \beta$ (рис. 322);

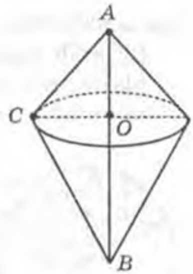


Рис. 322

V_1 і S_1 — об'єм і бічна поверхня верхнього конуса;

V_2 і S_2 — об'єм і бічна поверхня нижнього конуса.

$$V_1 = \frac{1}{3}\pi \cdot CO^2 \cdot AO;$$

$$V_2 = \frac{1}{3}\pi \cdot CO^2 \cdot BO;$$

$$V = V_1 + V_2 = \frac{1}{3}\pi CO^2 (AO + BO) = \frac{1}{3}\pi CO^2 \cdot AB;$$

$$S_1 = \pi CO \cdot AC; \quad S_2 = \pi CO \cdot BC;$$

$$S = S_1 + S_2 = \pi CO(AC + BC).$$

За теоремою синусів маємо:

$$\frac{AC}{\sin\beta} = \frac{BC}{\sin\alpha} = \frac{AB}{\sin(180° - (\alpha + \beta))};$$

$$\frac{AC}{\sin\beta} = \frac{BC}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin(\alpha + \beta)}; \quad AC = \frac{c \cdot \sin\beta}{\sin(\alpha + \beta)}; \quad BC = \frac{c \cdot \sin\alpha}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

Із $\triangle AOC$ ($\angle O = 90°$):

$$CO = AC \cdot \sin\alpha = \frac{c \cdot \sin\beta \cdot \sin\alpha}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

Отже, $V = \frac{1}{3}\pi \frac{c^2 \sin^2\beta \cdot \sin^2\alpha}{\sin^2(\alpha+\beta)} c = \frac{1}{3}\pi \frac{c^3 \sin^2\beta \sin^2\alpha}{\sin^2(\alpha+\beta)}$;

$$S = \pi \frac{c\sin\beta\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}\left(\frac{c\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} + \frac{c\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}\right) =$$

$$= \pi \frac{c\sin\beta\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} \cdot \frac{c(\sin\alpha+\sin\beta)}{\sin(\alpha+\beta)} =$$

$$= \pi \frac{c^2\sin\alpha\sin\beta}{\sin^2(\alpha+\beta)}(\sin\alpha+\sin\beta).$$

Відповідь. $\frac{1}{3}\pi \frac{c^3 \sin^2\beta \sin^2\alpha}{\sin^2(\alpha+\beta)}$; $\pi \frac{c^2\sin\alpha\sin\beta}{\sin^2(\alpha+\beta)}(\sin\alpha+\sin\beta)$.

Задача 5. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 30 см і 40 см. На якій відстані від площини трикутника розміщений центр сфери, яка має радіус 65 см і проходить через усі вершини трикутника?

Розв'язання.

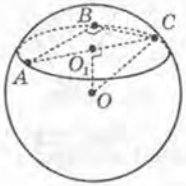


Рис. 323

Нехай ABC — даний трикутник (рис. 323), $AB = 30$ см; $BC = 40$ см, $\angle ABC = 90°$,

$AO = OB = OC = 65$ см.

Оскільки точка O рівновіддалена від точок A, B, C, то точка O проектується на площину (ABC) у точку O_1 — центр кола, описаного навколо $\triangle ABC$.

Оскільки $\triangle ABC$ — прямокутний, то O_1 — середина гіпотенузи AC.

Із $\triangle ABC$ за теоремою Піфагора:

$AC^2 = AB^2 + BC^2$;

$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{30^2 + 40^2} = 50$ (см).

$AO_1 = O_1C = \frac{1}{2}AC = 25$ см.

Із прямокутного $\triangle OO_1C\ (\angle O_1 = 90°)$ за наслідком із теореми Піфагора:

$OO_1^2 = OC^2 - O_1C^2$;

$OO_1 = \sqrt{OC^2 - O_1C^2} = \sqrt{65^2 - 25^2} = \sqrt{40 \cdot 90} = 60$ (см).

Відповідь. 60 см.

Задача 6. Радіуси основ зрізаного конуса дорівнюють R і r $(R > r)$, а твірна утворює з площиною основи кут α. Знайти бічну поверхню зрізаного конуса.

Розв'язання.

Нехай $AO = r$, $BO_1 = R$ (рис. 324).

Побудуємо $AM \parallel OO_1$.

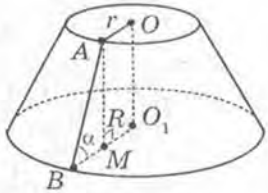


Рис. 324

Оскільки відрізок OO_1 перпендикулярний до площини основи зрізаного конуса, то відрізок AM також перпендикулярний до площини основи зрізаного конуса. Отже, BM — проекція похилої AB на площину основи.

$\angle ABM$ — кут між твірною AB і площиною основи. За умовою задачі $\angle ABM = \alpha$. $BM = BO_1 - AO = R - r$.

Із $\triangle ABM$ $(\angle M = 90°)$: $AB = \dfrac{BM}{\cos\alpha} = \dfrac{R-r}{\cos\alpha}$.

$$S_б = \pi AB\left(BO_1 + AO\right) = \pi\frac{R-r}{\cos\alpha}(R+r) = \pi\frac{R^2-r^2}{\cos\alpha}.$$

Відповідь. $\pi\dfrac{R^2-r^2}{\cos\alpha}$.

Задача 7. Об'єм конуса дорівнює V. У конус вписана піраміда, в основі якої лежить рівнобедрений трикутник із кутом α при вершині. Знайти об'єм піраміди.

Розв'язання.

За умовою задачі об'єм конуса дорівнює V, тобто:

$$\frac{\pi R^2 H}{3} = V;\quad H = \frac{3V}{\pi R^2}.$$

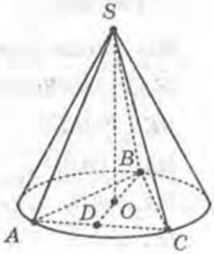


Рис. 325

Нехай $\triangle ABC$ — даний рівнобедрений трикутник (рис. 325), $AB = BC$; $\angle ABC = \alpha$.

Нехай $AB = BC = a$, тоді

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}a^2\sin\alpha.$$

За наслідком із теореми синусів:

$$\frac{BC}{\sin\left(90° - \frac{\alpha}{2}\right)} = 2R;\quad \frac{BC}{\cos\frac{\alpha}{2}} = 2R;$$

$$R = \frac{a}{2\cos\frac{\alpha}{2}};$$

$$H = \frac{3V}{\pi\left(\frac{a}{2\cos\frac{\alpha}{2}}\right)^2} = \frac{12V\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\pi a^2};$$

$$V = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}a^2\sin\alpha\,\frac{12V\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\pi a^2} = \frac{2V\cos^2\frac{\alpha}{2}\sin\alpha}{\pi}.$$

Відповідь. $\frac{2V\cos^2\frac{\alpha}{2}\sin\alpha}{\pi}$.

Задача 8. Кут між площиною основи і бічною гранню правильної чотирикутної піраміди дорівнює φ. Площа поверхні сфери, вписаної в піраміду, дорівнює S. Знайти площу бічної поверхні піраміди.

Рис. 326

Розв'язання.

Нехай $SABCD$ — зображення даної правильної чотирикутної піраміди (рис. 326), $SO \perp (ABC)$, O — центр вписаного і описаного навколо квадрата $ABCD$ кола. Побудуємо $SK \perp AD$, тоді за теоремою про три перпендикуляри $OK \perp AD$.

$$\left.\begin{array}{l} AD \text{ – лінія перетину} \\ (SAD) \text{ і } (ABC), \\ SK \subset (SAD), \\ OK \subset (ABC), \\ SK \perp AD, \\ OK \perp AD \end{array}\right\} \Rightarrow \angle SKO \text{ — кут між } (SAD) \text{ і } (ABC).$$

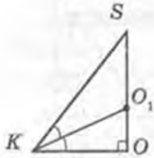


Рис. 327

За умовою задачі $\angle SKO = \varphi$.

Оскільки вершина піраміди проектується в центр кола, вписаного в основу, то центр вписаної сфери розміщений у точці перетину висоти піраміди і бісектриси лінійного кута двогранного кута при її основі.

Нехай O_1 — центр вписаної сфери (рис. 327), тоді O_1O — радіус вписаної сфери.

За умовою задачі $4\pi \cdot O_1O^2 = S$;

$$O_1O = \sqrt{\frac{S}{4\pi}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{S}{\pi}}.$$

Із $\triangle KOO_1$ $(\angle O = 90^\circ)$: $KO = OO_1 \cdot \operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{S}{\pi}} \cdot \operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}$.

$$AB = 2KO = \sqrt{\frac{S}{\pi}} \cdot \operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2};$$

$$S_о = AB^2 = \frac{S}{\pi}\operatorname{ctg}^2\frac{\varphi}{2};$$

$$S_б = \frac{S_о}{\cos\varphi} = \frac{S \cdot \operatorname{ctg}^2\frac{\varphi}{2}}{\pi\cos\varphi}.$$

Відповідь. $\dfrac{S \cdot \operatorname{ctg}^2\frac{\varphi}{2}}{\pi\cos\varphi}$.

Задача 9. Бічне ребро правильної чотирикутної піраміди дорівнює b і утворює з висотою піраміди кут β. Знайти площу поверхні сфери, описаної навколо даної піраміди.

Розв'язання.

Нехай $SABCD$ — зображення даної піраміди (рис. 328), у якій

$SA = SB = SC = SD = b$;

$\angle BSO = \beta$; $SO \perp (ABC)$,

O — центр квадрата $ABCD$.

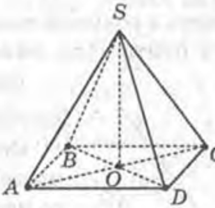


Рис. 328

Оскільки бічне ребро піраміди SB і перпендикуляр SO, проведений до її основи через центр кола, яке описане навколо основи, не є мимобіжними прямими, то центр сфери, описаної навколо даної піраміди, є точкою перетину серединного перпендикуляра до бічного ребра SB, проведеного в площині (SBO), із перпендикуляром SO. Нехай O_1 — центр описаної сфери (рис. 329), тоді O_1S — радіус сфери.

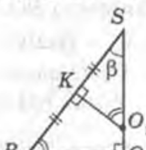


Рис. 329

$4\pi R^2 = 4\pi O_1S^2$.

Із прямокутного $\triangle SOB$ $(\angle O = 90^\circ)$:

$SO = SB\cos\beta = b\cos\beta$.

Розглянемо прямокутні трикутники SKO_1 і SOB. У них спільний $\angle S$. Отже, $\triangle SKO_1 \sim \triangle SOB$ (за двома кутами), тому:

$$\frac{SK}{SO} = \frac{SO_1}{SB};\ \ \frac{b}{2b\cos\beta} = \frac{SO_1}{b};\ \ SO_1 = \frac{b^2}{2b\cos\beta} = \frac{b}{2\cos\beta};$$

$$S_б = 4\pi\left(\frac{b}{2\cos\beta}\right)^2 = \frac{\pi b^2}{\cos^2\beta}.$$

Відповідь. $\dfrac{\pi b^2}{\cos^2\beta}$.

Задача 10. Основою піраміди є прямокутник, у якому кут між діагоналями дорівнює α. Навколо цієї піраміди описано сферу радіусом R. Знайти об'єм піраміди, якщо всі її бічні ребра утворюють з основою кут β.

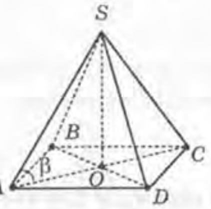


Рис. 330

Розв'язання.

Нехай $SABCD$ — зображення даної піраміди (рис. 330), у якій $ABCD$ — прямокутник, $\angle COD = \alpha$. Оскільки OA — проекція похилої SA на площину (ABC), то $\angle SAO$ — кут між SA та (ABC). За умовою задачі $\angle SAO = \angle SBO = \angle SCO = \angle SDO = \beta$.

Оскільки всі бічні ребра піраміди утворюють з основою однакові кути, то вершина піраміди проектується в центр кола, описаного навколо основи.

Рис. 331

Нехай $SO \perp (ABC)$, тоді O — точка перетину діагоналей прямокутника $ABCD$.

Оскільки бічне ребро SA і перпендикуляр SO, проведений до основи піраміди через центр описаного навколо основи кола, не є мимобіжними прямими, то центр сфери, описаної навколо даної піраміди, є точкою перетину серединного перпендикуляра до бічного ребра SA, проведеного в площині (SAO), з висотою SO. Нехай O_1 — центр описаної сфери (рис. 331), тоді O_1S — радіус даної сфери. За умовою задачі $O_1S = R$.

Розглянемо прямокутні трикутники SOA і SKO_1.

У них спільний $\angle S$.

Отже, $\triangle SOA \sim \triangle SKO_1$ (за двома кутами), тому $\dfrac{SO_1}{SA} = \dfrac{KO_1}{AO}$.

Із прямокутного $\triangle SKO_1$ $(\angle K = 90°)$:

$SK = SO_1 \cdot \sin\beta = R \cdot \sin\beta;$

$KO_1 = SO_1 \cdot \cos\beta = R \cdot \cos\beta;$

$SA = 2SK = 2R \cdot \sin\beta.$

$$\frac{R}{2R\sin\beta} = \frac{R\cos\beta}{AO};$$

$$AO = \frac{2R^2\sin\beta\cos\beta}{R} = R\sin 2\beta.$$

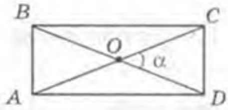


Рис. 332

Із прямокутного $\triangle SOA\ (\angle O = 90^\circ)$:

$SO = AO \cdot \operatorname{tg}\beta = R\sin 2\beta \cdot \operatorname{tg}\beta = 2R\sin^2\beta.$

Оскільки діагоналі прямокутника рівні і в точці перетину діляться навпіл (рис. 332), то $AC = BD = 2AO = 2R \cdot \sin 2\beta$.

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC \cdot BD \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2}(2R\sin 2\beta)^2\sin\alpha = 2R^2\sin^2 2\beta \cdot \sin\alpha.$$

$$V = \frac{1}{3}S_o \cdot SO = \frac{1}{3}2R^2\sin^2 2\beta \cdot \sin\alpha \cdot 2R \cdot \sin^2\beta =$$

$$= \frac{4}{3}R^3 \cdot \sin^2 2\beta \cdot \sin^2\beta \cdot \sin\alpha.$$

Відповідь. $\frac{4}{3}R^3 \cdot \sin^2 2\beta \cdot \sin^2\beta \cdot \sin\alpha.$

Задача 11. У конусі твірна l утворює з основою кут α. Знайти радіуси вписаної й описаної кулі.

Розв'язання.

1) Нехай SAB — осьовий переріз конуса, вписаного в кулю з центром O (рис. 333). $AS = BS = l$, $\angle SAB = \alpha$.

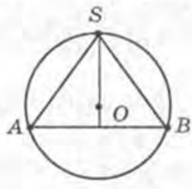


Рис. 333

За наслідком з теореми синусів для $\triangle SAB$:

$$\frac{BS}{\sin\angle SAB} = 2R; \quad \frac{l}{\sin\alpha} = 2R;$$

$$R = \frac{l}{2\sin\alpha}.$$

2) Нехай SAB — осьовий переріз конуса, описаного навколо кулі з центром O (рис. 334), $AS = l$, $\angle SAB = \alpha$.

O — центр кола, вписаного в $\triangle SAB$.

Отже, O — точка перетину бісетрис.

Побудуємо $SK \perp AB$, $O \in SK$.

Із $\triangle ASK$: $AK = AS \cdot \cos\alpha = l \cdot \cos\alpha.$

Рис. 334

Із $\triangle AKO\,(\angle K = 90^\circ)$: $OK = r = AK \cdot \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = l \cdot \cos\alpha \cdot \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$.

Відповідь. $\dfrac{l}{2\sin\alpha}$; $l \cdot \cos\alpha \cdot \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$.

Задача 12. Основою прямої призми є трикутник зі сторонами 6 см, 8 см і 10 см. Висота призми дорівнює 24 см. Знайти радіус описаної кулі.

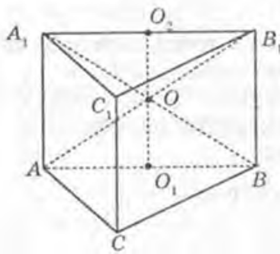


Рис. 335

Розв'язання.

Нехай призма $ACBA_1C_1B_1$ вписана в кулю (рис. 335), $AB = 10$ см, $AC = 6$ см, $BC = 8$ см. Оскільки $AB^2 = AC^2 + BC^2$, то $\triangle ACB$ — прямокутний ($\angle C = 90^\circ$).

Нехай O_1, O_2 — центри кіл, описаних навколо трикутників ACB і $A_1C_1B_1$, тоді O_1 — середина AB, O_2 — середина A_1B_1.

Центр кулі O лежить на прямій O_1O_2 і рівновіддалений від точок B, A, A_1, B_1. Отже, O — точка перетину діагоналей AB_1 і A_1B прямокутника AA_1B_1B.

Із $\triangle OO_1B$:

$$OB = \sqrt{OO_1^2 + O_1B^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}O_1O_2\right)^2 + O_1B^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13 \text{ (см)}.$$

Відповідь. 13 см.

Перевір себе

Задачі для самостійного розв'язування

1. Осьовий переріз циліндра — квадрат зі стороною a. Знайти об'єм циліндра.
2. Осьовий переріз циліндра — квадрат, діагональ якого дорівнює d. Знайти об'єм циліндра.
3. Діагональ осьового перерізу циліндра дорівнює d і утворює з твірною кут α. Знайти об'єм циліндра.

4. Радіус основи циліндра дорівнює R, площа осьового перерізу — S. Знайти об'єм циліндра.
5. Об'єм циліндра дорівнює V, а висота — H. Знайти діагональ осьового перерізу.
6. Переріз циліндра площиною, паралельною до його осі, — квадрат, який відтинає від кола основи радіуса r дугу β. Знайти об'єм циліндра.
7. В основі циліндра проведена хорда, яка стягує дугу α. Відрізок, який з'єднує центр однієї основи з точкою кола другої основи, утворює з площиною основи кут α. Знайти об'єм циліндра.
8. В основі циліндра проведено хорду, яка стягує дугу α. Відрізок, який з'єднує центр другої основи із серединою цієї хорди, дорівнює l і утворює з площиною основи кут β. Знайти об'єм циліндра.
9. Через твірну циліндра проведено дві площини, що перетинають циліндр. Кут між площинами дорівнює φ, а площі отриманих перерізів дорівнюють S. Висота циліндра дорівнює H. Знайти об'єм циліндра.
10. Знайти діагональ осьового перерізу циліндра, якщо об'єм циліндра дорівнює V, а бічна поверхня дорівнює S.
11. Площина, паралельна осі циліндра, відтинає від кола основи дугу в 120°. Знайти площу перерізу, якщо висота циліндра дорівнює H, а відстань між віссю циліндра і січною площиною дорівнює d.
12. Відстань від центра основи конуса до його твірної дорівнює d. Кут між твірною і площиною основи дорівнює α. Знайти повну поверхню та об'єм конуса.
13. Бічна поверхня конуса дорівнює S, а повна поверхня P. Знайти кут між висотою і твірною.
14. Рівнобедрений трикутник, бічна сторона якого дорівнює b, а кут при вершині α, обертається навколо бічної сторони. Знайти об'єм і площу повної поверхні тіла обертання.

15. Прямокутний трикутник обертається навколо гіпотенузи. Знайти об'єм тіла обертання, якщо довжина гіпотенузи дорівнює c, а гострий кут α.

16. Периметр прямокутного трикутника дорівнює $2p$, а гострий кут дорівнює α. Знайти об'єм тіла, отриманого при обертанні трикутника навколо гіпотенузи.

17. Прямокутний трикутник обертається навколо осі, що проходить через вершину гострого кута α паралельно протилежному до цього кута катету завдовжки a. Знайти об'єм тіла обертання.

18. Ромб, сторона якого дорівнює a, гострий кут α, обертається навколо прямої, проведеної через вершину гострого кута перпендикулярно до його сторони. Знайти об'єм тіла обертання.

19. Конус перетнуто площиною, паралельною основі, на відстані d від вершини. Знайти площу перерізу, якщо радіус основи конуса R, а висота H.

20. Висота конуса дорівнює радіусу основи R. Через вершину конуса проведено площину, яка відтинає від кола основи дугу $\alpha = 60°$. Знайти площу перерізу.

21. Радіус основи конуса дорівнює R, а бічна поверхня дорівнює сумі площ основи й осьового перерізу. Знайти об'єм конуса.

22. Радіуси основ зрізаного конуса дорівнюють 3 см і 6 см, а твірна дорівнює 5 см. Знайти об'єм зрізаного конуса.

23. Радіуси основ зрізаного конуса R і r, твірна нахилена до площини основи під кутом 45°. Знайти об'єм конуса.

24. Об'єм зрізаного конуса дорівнює 248π см^3, його висота — 8 см, радіус однієї з основ — 4 см. Знайти радіус другої основи.

25. Радіуси основ зрізаного конуса дорівнюють R і r $(R > r)$. Твірна нахилена до основи під кутом 60°. Знайти бічну поверхню зрізаного конуса.

26. Об'єм зрізаного конуса дорівнює V, його висота h. Площа трапеції, утвореної в результаті перетину конуса площиною, яка

проходить через його вісь, дорівнює m^2. Знайти радіуси основ конуса.

27. Об'єм кулі дорівнює 36π см^3. Знайти поверхню кулі.

28. Кулю перетнули площиною на відстані 6 см від центра. Площа перерізу дорівнює 64π см^2. Знайти радіус кулі.

29. Вершини трикутника лежать на сфері, радіус якої 13 см. Знайти відстань від центра сфери до площини трикутника, якщо сторони трикутника дорівнюють 6 см, 8 см, 10 см.

30. Діаметр кулі дорівнює d. Через один із кінців діаметра проведено площину під кутом $60°$ до нього. Знайти площу отриманого перерізу.

31. У конус вписано кулю радіусом R. Твірна конуса нахилена до площини основи під кутом α. Знайти об'єм конуса.

32. У конус вписано кулю. Знайти об'єм кулі, якщо твірна конуса дорівнює l і нахилена до площини основи під кутом α.

33. У конус, твірна якого нахилена до площини основи під кутом α, вписана піраміда. Основою піраміди є прямокутний трикутник із катетами a і b. Знайти об'єм піраміди.

34. Знайти площу бічної поверхні конуса, вписаного в правильну трикутну піраміду, якщо бічне ребро піраміди дорівнює l, а бічна грань піраміди утворює з площиною основи кут α.

35. У правильну чотирикутну піраміду вписано кулю. Відстань від центра кулі до вершини піраміди дорівнює a, а кут нахилу бічної грані піраміди до площини основи дорівнює α. Знайти площу бічної поверхні та об'єм піраміди.

36. Правильна трикутна призма вписана в кулю з радіусом R. Ребро основи призми дорівнює a. Знайти висоту призми.

37. У правильній чотирикутній піраміді висота дорівнює h, бічне ребро — b. Знайти площу описаної сфери.

38. Сторона основи і висота правильної чотирикутної піраміди дорівнює 4 см. Знайти радіус описаної кулі.

39. Навколо кулі з радіусом R описана правильна чотирикутна зрізана піраміда, у якої двогранний кут при основі дорівнює $45°$. Знайти її повну поверхню.

40. У правильній трикутній піраміді радіус вписаної кулі дорівнює r, двогранний кут при основі дорівнює α. Знайти площу повної поверхні піраміди.

41. Конус вписано в кулю, радіус якої дорівнює R. Знайти бічну поверхню конуса, якщо кут при вершині його осьового перерізу дорівнює α.

42. У кулю з радіусом R вписано правильний тетраедр. Знайти об'єм цього тетраедра.

43. У правильній трикутній піраміді сторона основи дорівнює a, а бічне ребро дорівнює $2a$. Знайти R і r — радіуси описаної і вписаної куль відповідно.

44. У правильній трикутній піраміді висота дорівнює h, а бічне ребро дорівнює b. Знайти R і r — радіуси описаної і вписаної куль відповідно.

45. Усі ребра правильної чотирикутної піраміди дорівнюють a. Знайти R і r — радіуси описаної і вписаної куль відповідно.

46. У правильній чотирикутній піраміді висота дорівнює a. Знайти R і r — радіуси описаної і вписаної куль відповідно.

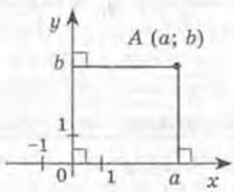
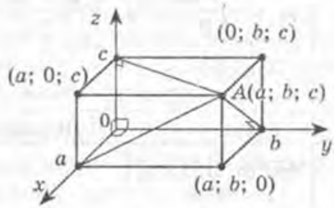
47. Плоский кут при вершині правильної чотирикутної піраміди дорівнює h, сторона основи дорівнює a. Знайти бічну поверхню піраміди, якщо радіус сфери, вписаної в цю піраміду, дорівнює R.

48. Відстань від середини висоти правильної чотирикутної піраміди до її бічної грані дорівнює d. Знайти повну поверхню вписаного в піраміду конуса, якщо твірна утворює з площиною основи кут α.

§ 6. Декартові координати та вектори

1. Декартові координати

Це треба знати!

№	На площині	У просторі
1	 **Рис. 336**	 **Рис. 337**
	Проведемо на площині через точку O дві взаємно перпендикулярні прямі x і y (рис. 336).	Візьмемо три взаємно перпендикулярні прямі x, y, z, які перетинаються в одній точці O (рис. 337).
	Вісь Ox називають ***віссю абсцис***, вісь Oy — ***віссю ординат***, точку O — ***початком координат.***	Вісь Ox називають ***віссю абсцис***, вісь Oy — ***віссю ординат***, вісь Oz — ***віссю аплікат.***
	Кожній точці A площини відповідають два числа a і b — відповідно ***абсциса*** і ***ордината.*** Ці числа називаються ***декартовими координатами*** даної точки	Точку перетину O називають ***початком координат.*** Площини xOy, yOz, xOz називаються ***координатними площинами.*** У декартовій системі координат кожній точці A простору відповідає три числа a, b, c, які називаються її ***декартовими координатами — абсциса, ордината*** і ***апліката*** відповідно. Вони визначаються аналогічно декартовим координатам точок на площині

№	На площині	У просторі
2	**Координати середини відрізка**	
	Нехай дано дві точки $A(x_1; y_1)$; $B(x_2; y_2)$. $C(x_C; y_C)$ — середина відрізка AB, тоді $x_C = \frac{x_1 + x_2}{2}$; $y_C = \frac{y_1 + y_2}{2}$	Нехай дано дві точки $A(x_1; y_1; z_1)$; $B(x_2; y_2; z_2)$. $C(x_C; y_C; z_C)$ — середина відрізка AB, тоді $x_C = \frac{x_1 + x_2}{2}$; $y_C = \frac{y_1 + y_2}{2}$; $z_C = \frac{z_1 + z_2}{2}$
3	**Відстань між точками**	
	Якщо $A(x_1; y_1)$; $B(x_2; y_2)$, тоді $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$	Якщо $A(x_1; y_1; z_1)$; $B(x_2; y_2; z_2)$, тоді $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$
4	**Рівняння кола**	**Рівняння сфери**
	Якщо центр кола розміщений у точці $M(a; b)$, а радіус кола R, то рівняння має вигляд: $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$	Якщо центр сфери розміщений у точці $M(a; b; c)$, а радіус сфери R, то рівняння має вигляд: $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$
5	**Паралельне перенесення**	
	Перетворення, при якому довільна точка $(x; y)$ фігури переходить у точку $(x + a; y + b)$, де a і b одні й ті самі для всіх точок $(x; y)$, називається ***паралельним перенесенням***. Паралельне перенесення задають формулами: $\begin{cases} x' = x + a, \\ y' = y + b, \end{cases}$ де $(x'; y')$ — точка, у яку переходить точка $(x; y)$	***Паралельним перенесенням у просторі*** називається таке перетворення, при якому довільна точка $(x; y; z)$ фігури переходить у точку $(x + a; y + b; z + c)$, де a, b і c — одні й ті самі для всіх точок $(x; y; z)$. Паралельне перенесення задають формулами: $\begin{cases} x' = x + a, \\ y' = y + b, \\ z' = z + c, \end{cases}$ де $(x'; y'; z')$ — точка, у яку переходить точка $(x; y; z)$

2. Вектори

Вектор — напрямлений відрізок.

$\overline{AB}$, $\vec{a}$ — вектор (A — початок вектора, B — кінець вектора).

Модуль вектора (***абсолютна величина вектора***) — довжина відрізка, що зображує вектор. $|\overline{AB}|$, $|\vec{a}|$ — модуль вектора.

Будь-яка точка площини є вектором. Такий вектор називається нульовим. Початок нульового вектора збігається з його кінцем. Довжина нульового вектора дорівнює нулю: $|\vec{0}| = 0$.

Ненульові вектори називаються ***колінеарними***, якщо вони лежать або на одній прямій, або на паралельних прямих; нульовий вектор вважають колінеарним будь-якому вектору.

Два ненульові вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (рис. 338) називаються ***співнапрямленими*** або однаково напрямленими $(\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b})$, якщо вони колінеарні і лежать в одній півплощині відносно прямої, яка сполучає їх початки.

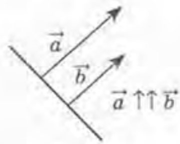


Рис. 338

У випадку, коли $\vec{a}$ і $\vec{b}$ лежать на одній прямій, для перевірки співнапрямленості векторів необхідно паралельно перенести їх так, щоб вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ не лежали на одній прямій (рис. 339).

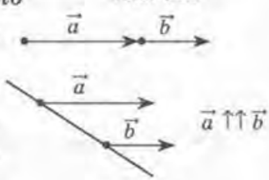


Рис. 339

Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називаються ***протилежно напрямленими*** $(\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b})$ (рис. 340), якщо вони колінеарні і лежать у різних півплощинах відносно прямої, яка сполучає їх початки (якщо $\vec{a}$ і $\vec{b}$ лежать на одній прямій, то для перевірки протилежної напрямленості необхідно паралельно перенести їх так, щоб вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ не лежали на одній прямій) (рис. 341).

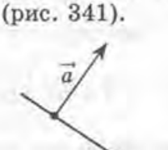


Рис. 340

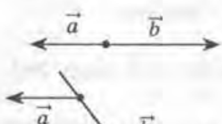


Рис. 341

Два ненульові вектори називаються ***рівними***, якщо вони співнапрямлені та їхні модулі рівні.

Два ненульові вектори називаються ***протилежними***, якщо вони протилежно напрямлені та їхні модулі рівні.

Додавання векторів

1. Правило трикутника (рис. 342).

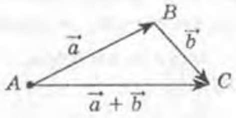


Рис. 342

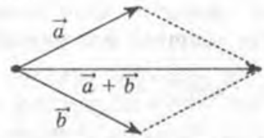


Рис. 343

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.

Поняття рівності векторів дає змогу відкладати вектор, що дорівнює даному, від будь-якої точки площини.

2. Правило паралелограма (рис. 343).
3. Правило паралелепіпеда (рис. 344).

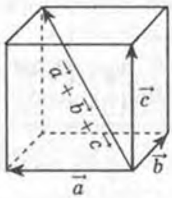


Рис. 344

Віднімання векторів

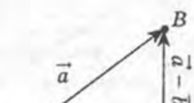


Рис. 345

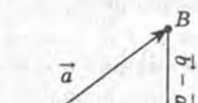


Рис. 346

$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$ (рис. 345) $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}$ (рис. 346)

Добуток вектора на число

$\lambda\vec{a}$ означає, що $|\lambda\vec{a}|=|\lambda|\cdot|\vec{a}|$; вектори $\lambda\vec{a}$ і $\vec{a}$ співнапрямлені, якщо $\lambda>0$; вектори $\lambda\vec{a}$ і $\vec{a}$ протилежно напрямлені, якщо $\lambda<0$.

Умова колінеарності векторів:

- якщо $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні, то $\vec{b}=\lambda\vec{a}$;
- якщо $\vec{b}=\lambda\vec{a}$, то $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні.

На площині	У просторі
Координати вектора	
Координатами вектора $\overline{AB}$ із початком у точці $A(x_A;\ y_A)$ і кінцем у точці $B(x_B;\ y_B)$ називають числа $x_B - x_A;\ y_B - y_A$. $\overline{AB}\left(x_B - x_A;\ y_B - y_A\right)$	Координатами вектора $\overline{AB}$ із початком в точці $A(x_A;\ y_A;\ z_A)$ і кінцем у точці $B(x_B;\ y_B;\ z_B)$ називають числа $x_B - x_A;\ y_B - y_A;\ z_B - z_A$. $\overline{AB}\left(x_B - x_A;\ y_B - y_A;\ z_B - z_A\right)$
Довжина вектора	
Якщо $\vec{a}(x;\ y)$, то $\lvert\vec{a}\rvert = \sqrt{x^2 + y^2}$	Якщо $\vec{a}(x;\ y;\ z)$, то $\lvert\vec{a}\rvert = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
Умови рівності векторів	
$\vec{a}(x_1;\ y_1) = \vec{b}(x_2;\ y_2)$ тоді і тільки тоді, коли $\begin{cases} x_1 = x_2, \\ y_2 = y_2 \end{cases}$	$\vec{a}(x_1;\ y_1;\ z_1) = \vec{b}(x_2;\ y_2;\ z_2)$ тоді і тільки тоді, коли $\begin{cases} x_1 = x_2, \\ y_2 = y_2, \\ z_1 = z_2 \end{cases}$
Сума і різниця двох векторів	
Якщо $\vec{a}(x_1;\ y_1)$, $\vec{b}(x_2;\ y_2)$, то $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}(x_1 + x_2;\ y_1 + y_2)$; $\vec{a} - \vec{b} = \vec{d}(x_1 - x_2;\ y_1 - y_2)$	Якщо $\vec{a}(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $\vec{b}(x_2;\ y_2;\ z_2)$, то $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}(x_1 + x_2;\ y_1 + y_2;\ z_1 + z_2)$; $\vec{a} - \vec{b} = \vec{d}(x_1 - x_2;\ y_1 - y_2;\ z_1 - z_2)$
Множення вектора на число	
Якщо $\vec{a}(x_1;\ y_1)$, то $\lambda\vec{a} = \vec{b}(\lambda x_1;\ \lambda y_1)$	Якщо $\vec{a}(x_1;\ y_1;\ z_1)$, то $\lambda\vec{a} = \vec{b}(\lambda x_1;\ \lambda y_1;\ \lambda z_1)$
Умова колінеарності векторів	
$\vec{a}(x_1;\ y_1)$ і $\vec{b}(x_2;\ y_2)$ колінеарні тоді і тільки тоді, коли $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$	$\vec{a}(x_1;\ y_1;\ z_1)$ і $\vec{b}(x_2;\ y_2;\ z_2)$ колінеарні тоді і тільки тоді, коли $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$

На площині	У просторі
Скалярний добуток двох векторів	
Якщо $\vec{a}(x_1;\ y_1)$, $\vec{b}(x_2;\ y_2)$, то $\vec{a}\cdot\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2$, або $\vec{a}\cdot\vec{b} = \lvert\vec{a}\rvert\cdot\lvert\vec{b}\rvert\cos\varphi$, де φ — кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ $\cos\varphi = \dfrac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$	Якщо $\vec{a}(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $\vec{b}(x_2;\ y_2;\ z_2)$, то $\vec{a}\cdot\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$, або $\vec{a}\cdot\vec{b} = \lvert\vec{a}\rvert\cdot\lvert\vec{b}\rvert\cos\varphi$, де φ — кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ $\cos\varphi = \dfrac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$

Самовчитель

Задача 1. Дано точку $A(1;\ 2;\ 5)$. Знайти координати основ перпендикулярів, опущених із цієї точки на координатні площини і координатні осі.

Розв'язання.

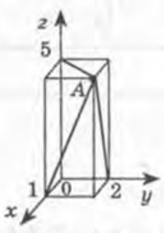


Рис. 347

Побудуємо точку $A(1;\ 2;\ 5)$ (рис. 347). Основами перпендикулярів, опущених із цієї точки на координатні площини, будуть A_{xy}, A_{xz}, A_{yz}. Основами перпендикулярів, опущених із цієї точки на координатні осі, будуть A_x, A_y, A_z.

$$A_x(1;\ 0;\ 0);\quad A_y(0;\ 2;\ 0);\quad A_z(0;\ 0;\ 5).$$

$$A_{xy}(1;\ 2;\ 0);\quad A_{xz}(1;\ 0;\ 5);\quad A_{yz}(0;\ 2;\ 5).$$

Відповідь. $A_x(1;\ 0;\ 0)$; $A_y(0;\ 2;\ 0)$; $A_z(0;\ 0;\ 5)$; $A_{xy}(1;\ 2;\ 0)$; $A_{xz}(1;\ 0;\ 5)$; $A_{yz}(0;\ 2;\ 5)$.

Задача 2. Знайти відстань від точки $A(2;\ 3;\ 1)$ до: 1) координатних осей; 2) координатних площин; 3) початку координат.

Розв'язання.

1) Основами перпендикулярів, опущених із точки $A(2;\ 3;\ 1)$ на координатні осі будуть A_x, A_y, A_z; $A_x(2;\ 0;\ 0)$, $A_y(0;\ 3;\ 0)$, $A_z(0;\ 0;\ 1)$.

Отже,

$$AA_x = \sqrt{(2-2)^2 + (0-3)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10};$$

$$AA_y = \sqrt{(0-2)^2 + (3-3)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5};$$

$$AA_z = \sqrt{(0-2)^2 + (0-3)^2 + (1-1)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}.$$

2) Основами перпендикулярів, опущених з точки $A(2;\ 3;\ 1)$ на координатні площини, будуть A_{xy}, A_{xz}, A_{yz}; $A_{xy}(2;\ 3;\ 0)$, $A_{xz}(2;\ 0;\ 1)$, $A_{yz}(0;\ 3;\ 1)$.

Отже, $AA_{xy} = \sqrt{(2-2)^2 + (3-3)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{1} = 1;$

$$AA_{xz} = \sqrt{(2-2)^2 + (0-3)^2 + (1-1)^2} = \sqrt{9} = 3;$$

$$AA_{yz} = \sqrt{(0-2)^2 + (3-3)^2 + (1-1)^2} = \sqrt{4} = 2.$$

3) Оскільки $O(0;\ 0;\ 0)$, то

$$AO = \sqrt{(0-2)^2 + (0-3)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{4+9+1} = \sqrt{14}.$$

Відповідь. 1) $\sqrt{10}$; $\sqrt{5}$; $\sqrt{13}$; 2) 1; 2; 3; 3) $\sqrt{14}$.

Задача 3. Точка $C(2;\ -3;\ 5)$ — середина відрізка AB, де $A(6;\ -4;\ 1)$. Знайти координати точки B.

Розв'язання.

Нехай $B(x_B;\ y_B;\ z_B)$, тоді

$$\begin{cases} 2 = \dfrac{6 + x_B}{2}, \\ -3 = \dfrac{-4 + y_B}{2}, \\ 5 = \dfrac{1 + z_B}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} 6 + x_B = 4, \\ -4 + y_B = -6, \\ 1 + z_B = 10; \end{cases} \quad \begin{cases} x_B = -2, \\ y_B = -2, \\ z_B = 9. \end{cases}$$

Відповідь. $B(-2;\ -2;\ 9)$.

Задача 4. Знайти точку, рівновіддалену від точок $A(-2;\ 3;\ 5)$ і $B(3;\ 2;\ -3)$ і розташовану на осі Oy.

Розв'язання.

Нехай точка M лежить на осі Oy, тоді M має координати $(0;\ y;\ 0)$. Знайдемо відстань AM і BM:

$$AM = \sqrt{(-2-0)^2 + (3-y)^2 + (5-0)^2} = \sqrt{29 + (3-y)^2};$$

$$BM = \sqrt{(3-0)^2 + (2-y)^2 + (-3-0)^2} = \sqrt{18 + (2-y)^2}.$$

За умовою $AM = BM$, тоді

$$\sqrt{29 + (3-y)^2} = \sqrt{18 + (2-y)^2};$$

$(3-y)^2+29=(2-y)^2+18;$

$9-6y+y^2+29=4-4y+y^2+18;$

$-2y=-16;\ y=8.$

Відповідь. (0; 8; 0).

Задача 5. Знайти координати вершини D паралелограма $ABCD$, якщо координати трьох інших його вершин відомі: $A(1;-2;-4)$, $B(3;-2;-1)$, $C(2;4;-3)$.

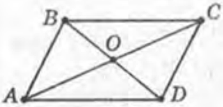


Рис. 348

Розв'язання.

Діагоналі паралелограма перетинаються і в точці перетину діляться навпіл (рис. 348), тобто $AO=OC$. Знайдемо координати точки $O(x_0;\ y_0;\ z_0)$:

$$x_0=\frac{1+2}{2}=\frac{3}{2}=1,5;$$

$$y_0=\frac{-2+4}{2}=\frac{2}{2}=1;$$

$$z_0=\frac{-4+(-3)}{2}=\frac{-7}{2}=-3,5.$$

Нехай $D(x_D;\ y_D;\ z_D)$, тоді

$$\begin{cases}1,5=\dfrac{3+x_D}{2},\\ 1=\dfrac{-2+y_D}{2},\\ -3,5=\dfrac{-1+z_D}{2};\end{cases}\quad \begin{cases}3+x_D=3,\\ -2+y_D=2,\\ -1+z_D=-7;\end{cases}\quad \begin{cases}x_D=0,\\ y_D=4,\\ z_D=-6.\end{cases}$$

Відповідь. $D(0;4;-6)$.

Задача 6. Скласти рівняння сфери із центром у точці $B(1;1;3)$, якщо відомо, що вона проходить через точку $M(2;0;-1)$.

Розв'язання.

Знайдемо радіус R сфери:

$$R=BM=\sqrt{(2-1)^2+(0-1)^2+(-1-3)^2}=\sqrt{18}.$$

Враховуючи, що центр сфери розміщений у точці $B(1;1;3)$, а $R=\sqrt{18}$, то рівняння сфери буде мати вигляд:

$$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=18.$$

Відповідь. $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=18.$

Задача 7. Знайти центр і радіус сфери, яку задано рівнянням:
$x^2 + y^2 + z^2 + 2y - 6z - 6 = 0$.

Розв'язання.

$x^2 + y^2 + z^2 + 2y - 6z - 6 = x^2 + \left(y^2 + 2y + 1\right) - 1 + \left(z^2 - 6z + 9\right) - 9 - 6 =$

$= x^2 + \left(y + 1\right)^2 + \left(z - 3\right)^3 - 16 = 0;$

$x^2 + \left(y + 1\right)^2 + \left(z - 3\right)^2 = 16.$

Отже центр сфери має координати $(0; -1; 3)$, а радіус сфери $R = \sqrt{16} = 4$.

Відповідь. $(0; -1; 3)$; $R = 4$.

Задача 8. Скласти рівняння сфери, якщо відомо, що вона проходить через точки $A(0; 5; 1)$, $B(-2; 0; 4)$, а її центр лежить на осі Oz.

Розв'язання.

Оскільки центр сфери лежить на осі Oz, то він має координати $(0; 0; c)$. Отже, рівняння сфери має вигляд:

$x^2 + y^2 + \left(z - c\right)^2 = R^2.$

Знайдемо c і R із умови, що точки $A(0; 5; 1)$ і $B(-2; 0; 4)$ лежать на сфері:

$\begin{cases} 0^2 + 5^2 + (1 - c)^2 = R^2; \\ (-2)^2 + 0^2 + (4 - c)^2 = R^2; \end{cases} \quad \begin{cases} 25 + (1 - c)^2 = R^2, \\ 4 + (4 - c)^2 = R^2; \end{cases}$

$25 + (1 - c)^2 = 4 + (4 - c)^2; \quad 25 + 1 - 2c + c^2 = 4 + 16 - 8c + c^2;$

$6c = -6; \; c = -1; \; 25 + \left(1 - (-1)\right)^2 = R^2;$

$R^2 = 25 + 4 = 29$. Отже, рівняння сфери набуває вигляду:

$x^2 + y^2 + (z + 1)^2 = 29.$

Відповідь. $x^2 + y^2 + (z + 1)^2 = 29$.

Задача 9. Дано вектори $\vec{a}\left(-2; 4; 3\right)$; $\vec{b}\left(1; -2; -1\right)$; $\vec{c}\left(-4; 3; -3\right)$.

Знайти координати вектора $\vec{p} = 3\vec{a} - 2\vec{b} + 4\vec{c}$.

Розв'язання.

$\vec{p} = 3\left(\overrightarrow{-2; 4; 3}\right) - 2\left(\overrightarrow{1; -2; -1}\right) + 4\left(\overrightarrow{-4; 3; -3}\right) =$

$= \left(\overrightarrow{-6; 12; 9}\right) - \left(\overrightarrow{2; -4; -2}\right) + \left(\overrightarrow{-16; 12; -12}\right) =$

$= \left(\overrightarrow{-6 - 2 - 16; 12 + 4 + 12; 9 + 2 - 12}\right) = \left(\overrightarrow{-24; 28; -1}\right).$

Відповідь. $\vec{p}\left(-24; 28; -1\right)$.

Задача 10. Дано вектори $\vec{a}(2; -1; 1)$; $\vec{b}(-5; 4; -2)$. Знайти $|\vec{a}+\vec{b}|$.

Розв'язання.

$\vec{a}+\vec{b} = \overline{(2; -1; 1)} + \overline{(-5; 4; -2)} = \overline{(-3; 3; -1)}$;

$|\vec{a}+\vec{b}| = \sqrt{(-3)^2+3^2+(-1)^2} = \sqrt{9+9+1} = \sqrt{19}$.

Відповідь. $\sqrt{19}$.

Задача 11. Знайти кут між векторами $\vec{a}(2; 1; -3)$; $\vec{b}(-1; 3; -2)$.

Розв'язання.

$\cos\varphi = \dfrac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$;

$\vec{a}\vec{b} = 2\cdot(-1)+1\cdot 3+(-3)(-2) = -2+3+6 = 7$.

$|\vec{a}| = \sqrt{2^2+1^2+(-3)^2} = \sqrt{14}$;

$|\vec{b}| = \sqrt{(-1)^2+3^3+(-2)^2} = \sqrt{14}$;

$\cos\varphi = \dfrac{7}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{14}} = \dfrac{7}{14} = \dfrac{1}{2}$;

$\varphi = \arccos\dfrac{1}{2} = 60°$.

Відповідь. 60°.

Задача 12. Знайти гострий кут між діагоналями паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}(3; 1; 1)$; $\vec{b}(1; -1; 2)$.

Розв'язання.

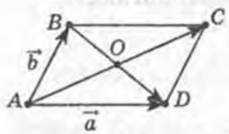


Рис. 349

У паралелограмі одна із діагоналей — це сума векторів, на яких побудовано паралелограм, а друга діагональ — різниця тих самих векторів. У заданому паралелограмі $ABCD$ $\overline{AD} = \overline{BC} = \vec{a}$, $\overline{AB} = \overline{DC} = \vec{b}$, $\overline{AC} = \vec{a}+\vec{b}$, $\overline{BD} = \vec{a}-\vec{b}$ (рис. 349).

Знайдемо кут φ між діагоналями $\overline{AC}$ і $\overline{BD}$. Якщо φ виявиться тупим, тоді шуканий гострий кут буде дорівнювати $180° - \varphi$.

$\overline{AC} = \vec{a}+\vec{b} = \overline{(3; 1; 1)} + \overline{(1; -1; 2)} = \overline{(4; 0; 3)}$;

$\overline{BD} = \vec{a}-\vec{b} = \overline{(3; 1; 1)} - \overline{(1; -1; 2)} = \overline{(2; 2; -1)}$;

$|\overline{AC}| = \sqrt{4^2+0^2+3^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$;

$|\overline{BD}| = \sqrt{2^2+2^2+(-1)^2} = \sqrt{8+1} = \sqrt{9} = 3$;

$\overline{AC}\cdot\overline{BD} = 4\cdot 2+0\cdot 2+3\cdot(-1) = 8-3 = 5$.

Отже, $\cos\varphi = \dfrac{\overline{AC}\cdot\overline{BD}}{|\overline{AC}|\cdot|\overline{BD}|} = \dfrac{5}{5\cdot 3} = \dfrac{1}{3}$;

$\varphi = \arccos\dfrac{1}{3}$.

Відповідь. $\arccos\dfrac{1}{3}$.

Задача 13. При яких значеннях m і n вектори $\vec{a}(-1; 4; -2)$ і $\vec{b}(-3; m; n)$ колінеарні?

Розв'язання.

Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні тоді і тільки тоді, коли

$\dfrac{-1}{-3} = \dfrac{4}{m} = \dfrac{-2}{n}$; $m = \dfrac{4\cdot(-3)}{-1} = 12$;

$n = \dfrac{12\cdot(-2)}{4} = -6$.

Відповідь. При $m = 12$, $n = -6$.

Задача 14. Вектори $\vec{a}(n; -2; 1)$ і $\vec{b}(n; 1; -n)$ перпендикулярні. Знайти n.

Розв'язання.

Оскільки $\vec{a}\perp\vec{b}$, то $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$.

$n\cdot n+(-2)\cdot 1+1\cdot(-n) = 0$; $n^2-n-2 = 0$; $n_1 = 2$; $n_2 = -1$.

Відповідь. –1; 2.

Задача 15. Чи лежать точки A, B і C на одній прямій, якщо $A(3; -7; 8)$, $B(-5; 4; 1)$, $C(27; -40; 29)$?

Розв'язання.

Якщо вектори $\overline{AB}$ і $\overline{AC}$ колінеарні, то точки A, B і C лежать на одній прямій, а якщо не колінеарні, точки A, B і C не лежать на одній прямій. Знайдемо координати цих векторів:

$\overline{AB}(-5-3; 4-(-7); 1-8) = \overline{(-8; 11; -7)}$;

$\overline{AC}(27-3; -40-(-7); 29-8) = \overline{(24; -33; 21)}$.

Оскільки, $\dfrac{-8}{24} = \dfrac{11}{-33} = \dfrac{-7}{21} = -\dfrac{1}{3}$, то $\overline{AB}$ і $\overline{AC}$ колінеарні. Отже, точки A, B і C лежать на одній прямій.

Відповідь. A, B і C лежать на одній прямій.

Задача 16. Дано правильну трикутну призму $ABCA_1B_1C_1$, у якій $AA_1 = \sqrt{2}AB$. Знайти кут між AC_1 і A_1B.

Розв'язання.

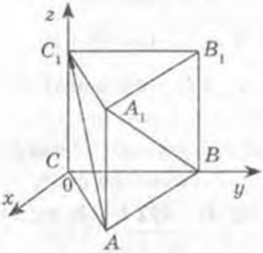


Рис. 350

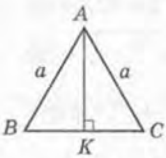


Рис. 351

Нехай $AB = a$, тоді $AA_1 = \sqrt{2}a$ (рис. 350). Введемо прямокутну систему координат, як показано на рисунку.

Знайдемо координати точок A, B, A_1, C_1. Побудуємо $AK \perp BC$ (рис. 351),

тоді $AK = a \cdot \sin 60° = a\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

$$A\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{a}{2}; 0\right); \quad B(0; a; 0);$$

$$A_1\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{a}{2}; a\sqrt{2}\right); \quad C_1(0; 0; a\sqrt{2}).$$

Знайдемо координати векторів $\overline{AC_1}$ і $\overline{BA_1}$.

$$\overline{AC_1}\left(-\frac{a\sqrt{3}}{2}; -\frac{a}{2}; a\sqrt{2}\right);$$

$$\overline{BA_1}\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}; -\frac{a}{2}; a\sqrt{2}\right).$$

$$\overline{AC_1} \cdot \overline{BA_1} = \frac{-a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} + \left(-\frac{a}{2}\right)\left(-\frac{a}{2}\right) + a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{2} =$$

$$= -\frac{3a^2}{4} + \frac{a^2}{4} + 2a^2 = \frac{3a^2}{2}.$$

$$\left|\overline{AC_1}\right| = \sqrt{\left(-\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{a}{2}\right)^2 + \left(a\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} + \frac{a^2}{4} + 2a^2} =$$

$$= \sqrt{3a^2} = a\sqrt{3};$$

$$\left|\overline{BA_1}\right| = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{a}{2}\right)^2 + \left(a\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} + \frac{a^2}{4} + 2a^2} =$$

$$= \sqrt{3a^2} = a\sqrt{3};$$

$$\cos\varphi = \frac{\overline{AC_1} \cdot \overline{BA_1}}{\left|\overline{AC_1}\right| \cdot \left|\overline{BA_1}\right|} = \frac{\frac{3a^2}{2}}{a\sqrt{3} \cdot a\sqrt{3}} = \frac{3a^2}{6a^2} = \frac{1}{2}. \quad \varphi = \arccos\frac{1}{2} = 60°.$$

Відповідь. 60°.

Задачі для самостійного розв'язування

Перевір себе

1. Знайти відстані від точки $A(-2;\ -3;\ -1)$ до координатних площин.

2. Дано точку $A(2;\ 3;\ 1)$. Знайти координати основ перпендикулярів, опущених із цієї точки на координатні площини.

3. Дано точку $A(2;\ 3;\ 1)$. Знайти координати основ перпендикулярів, опущених із цієї точки на координатні осі.

4. Знайти відстань між точками A і B, якщо $A(5;\ 6;\ 0)$, $B(0;\ 2;\ 5)$.

5. Знайти координати точки C — середини відрізка AB, якщо $A(3;\ 2;\ -1)$, $B(0;\ 1;\ 2)$.

6. $M(1;\ 2;\ 3)$ — середина відрізка AB. Знайти координати точки B, якщо $A(0;\ 1;\ 2)$.

7. Дано точки $A(1{,}5;\ 1;\ 0)$, $B(2;\ 2;\ -3)$ і $C(2;\ 0;\ -1)$. Знайти периметр трикутника ABC.

8. На осі z знайти точку, рівновіддалену від точок $A(-2;\ 1;\ 4)$ і $B(3;\ 0;\ 1)$.

9. Знайти координати точки, яка лежить на осі Oy і рівновіддалена від точок $A(4;\ -1;\ 3)$ і $B(1;\ 3;\ 0)$.

10. Дано координати трьох вершин паралелограма $A(-1;\ 1;\ 4)$, $B(2;\ 3;\ 1)$, $C(-2;\ 2;\ 0)$. Знайти координати четвертої вершини D.

11. Знайти координати вершини D паралелограма $ABCD$, якщо координати трьох інших його вершин відомі: $A(2;\ 3;\ 2)$, $B(0;\ 2;\ 4)$, $C(4;\ 1;\ 0)$.

12. Довести, що чотирикутник $ABCD$ із вершинами $A(1;\ 3;\ 2)$, $B(0;\ 2;\ 4)$, $C(1;\ 1;\ 4)$, $D(2;\ 2;\ 2)$ — паралелограм.

13. Скласти рівняння сфери $R = 5$ із центром у точці $A(1;\ 2;\ 3)$.

14. Знайти координати центра і радіус сфери, заданої рівнянням:
1) $x^2 + y^2 + z^2 = 2$;
2) $(x+2)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 3$;
3) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 2 = 0$.

15. Скласти рівняння сфери, яка проходить через початок координат, а центр її розміщений у точці $M(4; -4; 2)$.

16. Дано вектори $\vec{a}(-2; 1; -1)$; $\vec{b}(3; -2; -1)$. Знайти координати вектора $\vec{s} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$.

17. Знайти значення m і n, при яких вектори $\vec{a}(1; m; 3)$ і $\vec{b}(3; 6; n)$ колінеарні.

18. При якому значенні p вектори $\vec{a}(1; p; -2)$ і $\vec{b}(p; 3; -4)$ взаємно перпендикулярні?

19. Знайти кут між векторами $\vec{a}(-2; 0; 2)$ і $\vec{b}(-1; 1; 0)$.

20. При якому значенні y вектори $\vec{a}(-2; 4; 4)$ і $\vec{b}(6; y; -1)$ перпендикулярні?

21. Знайти гострий кут між діагоналями паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}(3; 2; 0)$ і $\vec{b}(1; -2; 2)$.

22. У паралелограмі $ABCD$ дано вершини $A(1; 0; 1)$, $B(1; 2; 9)$, $C(5; 6; 11)$. Знайти координати четвертої вершини D і кут ABC.

23. Знайти кут між векторами $-9\vec{a}$ і $\frac{1}{9}\vec{b}$, якщо $\vec{a}(2; 1; -2)$, $\vec{b}(5; -1; 1)$.

24. Дано вершини трикутника ABC: $A(2; 1; 7)$, $B(-1; 1; 3)$, $C(-8; 1; 2)$. Знайти його внутрішній кут при вершині B.

25. Знайти координати вектора $\vec{b}$, колінеарного вектору $\vec{a}(2; 5)$, що задовольняє умові $\vec{a} \cdot \vec{b} = -87$.

26. Знайти координати вектора $\vec{b}$, колінеарного вектору $\vec{a}\,(-3;\ 1;\ -4)$, якщо $\vec{a}\cdot\vec{b}=78$.

27. Чи лежать точки A, B і C на одній прямій, якщо $A(-5;\ 7;\ 12)$, $B(4;\ -8;\ 3)$, $C(13;\ -23;\ -6)$?

28. У кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка M лежить на ребрі AA_1, причому $AM : MA = 3 : 1$, а точка N — середина ребра BC. Знайти косинус кута між прямими:
а) MN і DD_1; б) MN і BD;
в) MN і B_1D; г) MN і A_1C.

ВІДПОВІДІ

Розділ 1. Тотожні перетворення

§ 1. Властивості степенів та арифметичних коренів

1. 1) 8; 2) $\dfrac{1}{3}$; 3) не має смислу; 4) $\sqrt[12]{3}$; 5) $\dfrac{1}{8}$; 6) 56; 7) –5.

2. 1) $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$; 2) $2\sqrt[3]{4}$; 3) $4\sqrt[4]{2}$; 4) $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$; 5) $\dfrac{\sqrt[3]{3}}{3}$; 6) $3\sqrt[4]{8}$.

3. 1) $xy^2\sqrt{xy}$; 2) $xy^2\sqrt[3]{x^2y}$; 3) $|ab|\sqrt{b^2}$; 4) $3c^2\sqrt[5]{2c^2}$;
5) $|xy|\sqrt[6]{x^2} = |xy|\sqrt[3]{|x|}$; 6) $4c^3\sqrt[3]{2a}$.

4. 1) $a\sqrt[3]{a}$; 2) $\sqrt{a}$; 3) $a\sqrt{|a|}$.

§ 2. Формули скороченого множення

1. 1) $b(a-3)$; 2) $\dfrac{b}{9(3+b)}$; 3) $\dfrac{(x+y)^2}{x+y+1}$; 4) 1; 5) 2; 6) $\dfrac{1+x^2}{x+y}$;
7) 1; 8) $-\dfrac{1}{4}$; 9) $\dfrac{x}{4(x+2)}$; 10) $a+b$; 11) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$; 12) 3;
13) $\dfrac{a}{a-2b}$; 14) 2.

2. 1) $\sqrt[3]{36}+\sqrt[3]{30}+\sqrt[3]{25}$; 2) $(\sqrt[4]{5}-\sqrt[4]{2})(\sqrt{5}+\sqrt{2})$; 3) $\dfrac{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1}{3}$;
4) $(\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})$; 5) $\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{3}$; 6) $\dfrac{(\sqrt{2}+\sqrt[4]{2})(2+\sqrt{2})}{2}$;
7) $(\sqrt[3]{3}-\sqrt{2})(\sqrt[3]{81}+2\sqrt[3]{9}+4)$.

3. 1) $\dfrac{\sqrt{b}-1}{\sqrt{ab}}$; 2) $-\dfrac{\sqrt{2}}{2a}$; 3) $\dfrac{2\sqrt{ab}-1}{\sqrt[12]{a^7b^3}}$; 4) $\dfrac{x^2}{2x-1}$.

4. 1) 4; 2) 2; 3) 23; 4) 1; 5) 6; 6) 1; 7) 9.

5. 1) $\frac{2x+7}{x-1}$; 2) $\frac{x+3}{x}$; 3) $-\frac{a+10}{a+6}$; 4) $9x^2-6xy+4y^2$;

5) $\frac{1}{a-2}$; 6) $\frac{1}{x+1}$; 7) $\frac{1}{c-3}$; 8) $\frac{a+b}{b+c}$; 9) $\frac{x-5}{x+10}$;

10) $\frac{x^2+3x-9}{x+3}$; 11) $\frac{a}{a^2-a-1}$.

§ 3. Тотожні перетворення логарифмічних виразів

1. 1) $-\frac{2}{3}$; 2) $-\frac{1}{6}$; 3) $\frac{1}{2}$; 4) -1; 5) 4; 6) $-\frac{3}{32}$; 7) $-\frac{1}{3}$; 8) $-4\frac{2}{3}$;

9) 8; 10) $2\sqrt[5]{2}$; 11) $2\sqrt[3]{3}$; 12) 729; 13) 1,2; 14) 9; 15) 2; 16) 890;

17) 1; 18) 1; 19) $\frac{1}{2}$; 20) 4; 21) 890; 22) 3; 23) 10; 24) 24;

25) 7; 26) 26; 27) 3; 28) $1+a$; 29) $b+2a$; 30) $\frac{6(2-a)}{4-a}$;

31) $\frac{1+a}{b+2a}$; 32) $1\frac{1}{2}$.

2. 1) $\frac{2(\log_b a-1)}{5\log_b a(\log_b a-4)}$; 2) $2\log_a(a^2-1)$; 3) $\frac{1}{\log_a b-1}$.

§ 4. Тотожні перетворення тригонометричних виразів

1. 1) 0,96; 2) $-0{,}28$; 3) $-0{,}96$; 4) $-\frac{33}{65}$; 5) $-\frac{1}{2}$;

6) $\sin\frac{x}{2}=\sqrt{0{,}1}$, $\cos\frac{x}{2}=\sqrt{0{,}9}$, $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{1}{3}$;

7) $\cos x=\frac{5}{13}$, $\operatorname{tg} x=-\frac{12}{5}$, $\operatorname{ctg} x=-\frac{5}{12}$.

2. 1) $\frac{1}{\sin^2\alpha}$; 2) $\operatorname{ctg}^6\alpha$; 3) $\frac{1+\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}$; 4) $\sin 2\alpha(2\sin\alpha+1)$;

5) $\operatorname{tg}5\alpha$; 6) $\sin\frac{\alpha}{2}$; 7) 0; 8) $\sin\alpha\sin 4\beta$; 9) $\frac{\cos 3\alpha}{\cos 2\alpha\cos 4\alpha}$;

10) $\frac{\sin 3\alpha}{\cos\alpha\cos 4\alpha}$; 11) $2\cos 4\alpha$; 12) $-4\sin 3\alpha$; 13) $\frac{1}{2}$;

14) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$; 15) $-\sin 4\alpha$; 16) $\sin 4\alpha$; 17) $-\sin 2\alpha$; 18) 1;

19) $\sqrt{2}\operatorname{ctg} 2\alpha$; 20) $\cos\alpha - \sin\alpha$; 21) $-\sin\alpha - \cos\beta$;

22) -1; 23) $2\sin\frac{\alpha}{2}+1$.

4. 1) Найбільше значення $\sqrt{2}$, найменше значення $-\sqrt{2}$;
2) Найбільше значення $\sqrt{5}$, найменше значення $-\sqrt{5}$;
3) Найбільше значення $\sqrt{10}$, найменше значення $-\sqrt{10}$;
4) Найбільше значення 5, найменше значення -5;
5) Найбільше значення 13, найменше значення -13;
6) Найбільше значення 17, найменше значення -17;
7) Найбільше значення 5, найменше значення -5;
8) Найбільше значення 25, найменше значення -25.

5. 1) $\frac{12}{13}$; $\frac{5}{12}$; $\frac{12}{13}$; $\frac{5}{13}$; 2) $\frac{3}{5}$; $\frac{4}{5}$; $\frac{4}{3}$; $\frac{3}{4}$; 3) $\frac{3}{4}$; $\frac{3}{5}$; $\frac{4}{5}$; $\frac{4}{3}$.

6. 1) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\sqrt{3}$; 4) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 5) $-\sqrt{3}$; 6) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 7) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$;

8) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$; 9) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$; 10) $-2\frac{3}{4}$; 11) $\frac{1}{8}$; 12) 0; 13) 0.

Розділ 2. Рівняння та системи рівнянь

§ 1. Лінійні рівняння і рівняння, що зводяться до них

1) 0; 2) x — будь-яке число; 3) 2; 4) x — будь-яке число;

5) x — будь-яке число; 6) $6\frac{5}{7}$; 7) $-11{,}2$; 8) 1,6; 9) 12;

10) 1; 11) 3; 12) 9; 13) $-\frac{4}{9}$; 14) $1\frac{4}{9}$; 15) $-1\frac{9}{20}$; 16) 0; -2;

17) 8; 18) 1,5; -5; 7; 19) 4; 20) -2.

§ 2. Квадратні рівняння та рівняння, що зводяться до них

1) 0; $1\frac{1}{6}$; 2) 0; 3; 3) розв'язків немає; 4) $\pm\frac{1}{2\sqrt{2}}$;

5) розв'язків немає; 6) $1\frac{1}{3}$; 7) розв'язків немає; 8) −12;

9) 0; 2; 10) 0; $5\frac{5}{7}$; 11) ±6; 12) ±5; 13) ±5; 14) 0; 15) 3; 11;

16) 4; 17) 5; −3,6; 18) $-\frac{1}{6}$; −3; 19) −4,8; 2; 20) 0,75;

21) −1; $\frac{6}{7}$; 22) 3; $-1\frac{1}{5}$; 23) 2; 24) 1; 25) $\frac{1}{3}$; ±1; 3;

26) 2; ±1; 27) −3; −2; −1; 6; 28) −1,5; −1; $-\frac{1}{2}$; 3;

29) −3,5; −0,5; 30) −4; 31) −7; −6; −3; −2; 32) −1; 1; 2; 4;
33) −4; −2; 1; 5; 34) ±1; 35) ±1; 36) −2; 3; 37) −4; 2; 38) ±3;

39) −2; 3; 40) $\frac{3 \pm \sqrt{21}}{2}$.

§ 3. Ірраціональні рівняння

1) 9; 2) $-\frac{1}{3}$; 3) 8; 4) 3; 5) 2; 6) 1; 7) 2; 8) 4; 9) $-\frac{13}{17}$; $\frac{47}{17}$;

10) 15625; 11) −1; 4; $\frac{3 \pm \sqrt{73}}{2}$; 12) −4; 3; 13) 59; 14) 2; −12;

15) 4; −3; 16) 7; 17) −11; 24; 18) 9; 19) −4; 3; 20) 4.

§ 4. Показникові рівняння

1) $3\log_{\frac{3}{4}} 2$; 2) −2; 3) $-\frac{2}{3}$; 4) 0; −2; 5) $-2\frac{2}{3}$; 6) 2; 7) −2,5;

8) $1\frac{5}{24}$; 9) 1; 0; 10) 2; 11) −1; 12) 1; 13) 7; 14) 1; 15) 1; 2;

16) 2; 17) 2; $\log_2 6\frac{2}{3}$; 18) 2; $\log_3 5$; 19) 1; 2; 4;

20) −3; 0; 1; $\frac{1}{2}$; 5; 21) 0; 1; 22) $\log_{\frac{3}{2}} \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$; 23) 0; $\frac{1}{2}$;

24) 1; 2; 25) 0; $\frac{1}{4}$.

§ 5. Логарифмічні рівняння

1) 1; 2) 10; 3) 3; 1; 4) –2; –1; 5) $\frac{1}{16}$; 4; 6) 10000; 0,1; 7) 2; $\frac{1}{128}$; 8) –4; 9) 1; 10) –3,5; 11) 2; 12) 2; 1; 13) 2; 14) 5; 15) розв'язків немає; 16) 2; 32; 17) 0,2; 625; 18) $\pm\sqrt{2}$; $\pm 2\sqrt{2}$; 19) 100; 0,1; 20) 3125; 5; 21) 2; $-1\frac{15}{16}$; 22) 9; 23) $\frac{1}{4}$; 8; 24) 1000; 10; 25) –2; 4; ±3.

§ 6. Тригонометричні рівняння

1) $\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi n}{3},\ n\in Z$;

2) $\pm\frac{5\pi}{3}-\frac{3\pi}{2}+4\pi n,\ n\in Z$;

3) $\frac{\pi}{12}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}3+\frac{\pi n}{2},\ n\in Z$;

4) $-\frac{5\pi}{12}+2\pi n,\ n\in Z$;

5) $-\frac{\pi}{12}+(-1)^{n+1}\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2},\ n\in Z$;

6) $-\frac{3\pi}{4}+6\pi n,\ n\in Z$;

7) $\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z$;

8) $-\operatorname{arctg}3+\pi n,\ \frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z$;

9) $\operatorname{arctg}\frac{7}{4}+\pi n,\ -\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z$;

10) $-\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi n,\ -\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z$;

11) $\pi n,\ (-1)^{n+1}\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2},\ n\in Z$;

12) $(-1)^n\arcsin\frac{1}{3}+\pi n,\ (-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z$;

13) $4\,\mathrm{arctg}\,2 + 4\pi n,\ \ -4\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{1}{2} + 4\pi n,\ n \in Z;$

14) $3\,\mathrm{arctg}\,5 + 3\pi n,\ \ -\dfrac{3\pi}{4} + 3\pi n,\ n \in Z;$

15) $2\pi n,\ \ \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z;$

16) $-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n,\ \ (-1)^n\dfrac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z;$

17) $-\dfrac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in Z;$

18) $(-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z;$

19) $\pm\arccos\dfrac{1}{4} + 2\pi n,\ n \in Z;$

20) $\dfrac{\pi n}{4},\ \ (-1)^n\dfrac{\pi}{24} + \dfrac{\pi n}{4},\ n \in Z;$

21) $\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n,\ \ (-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z;$

22) $(-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z;$

23) $(-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z;$

24) $\dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ \ \pm\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z;$

25) $\dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ \ (-1)^n\dfrac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z;$

26) $\pi n,\ \ -\dfrac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in Z;$

27) $-\mathrm{arctg}\,3 + \pi n,\ \ \dfrac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z;$

28) $\dfrac{\pi}{4} + \pi n,\ \ \mathrm{arctg}\,\dfrac{3}{2} + \pi n,\ n \in Z;$

29) $\dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ \ \dfrac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z;$

30) $(-1)^n \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z;$

31) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \ -2\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + 2\pi n, n \in Z;$

32) $\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi n}{3}, n \in Z;$

33) $\frac{\pi n}{2}, n \in Z;$

34) $\frac{\pi n}{2}, \ \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z;$

35) $\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z;$

36) $\frac{\pi n}{4}, \ \frac{\pi}{4} + \pi n, \ \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z;$

37) $\pi n, \ \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z;$

38) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, \ (-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z;$

39) $(-1)^n \frac{\pi}{3} + \pi n, \ (-1)^{n+1} \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z;$

40) $\frac{\pi}{2} + \pi n, \ \operatorname{arctg}\frac{3}{2} + \pi n, n \in Z;$

41) розв'язків немає.

§ 7. Додаткові відомості про рівняння.

1) -1; 6; 2) $6\frac{2}{3}$; $-1\frac{1}{3}$; 3) розв'язків немає;

4) $-0{,}5$; 5) розв'язків немає; 6) 0; -6; 7) розв'язків немає;

8) якщо $a = -1$, то x — будь-яке число; якщо $a \neq -1$, то $x = a - 1$;

9) якщо $a = 2$, то x — будь-яке число; якщо $a = -2$, то розв'язків немає; якщо $a = \pm 2$, то $x = \frac{a^2 + 2a + 4}{a + 2}$;

10) якщо $a = 0$, то рівняння коренів не має; якщо $a = -1$, то $x = 0$; якщо $a = 1$, то $x = 0$, $x = \pm\sqrt{2}$; якщо $a \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$, то $x = \pm\sqrt{\frac{1+a}{a}}$; якщо $a \in (0; 1)$, то $x = \pm\sqrt{\frac{1+a}{a}}$, $x = \pm\sqrt{\frac{1-a}{a}}$;

11) якщо $a = 3$, то x — будь-яке число, якщо $a \neq 3$, то $x = \frac{3 + a}{2}$;
12) 2; $-\frac{1}{3}$; $-\frac{2}{3}$; −1; 13) ±3; 14) ±3,5.

§ 8. Системи рівнянь

1) (4; 0); 2) (1; −2); 3) (3; 3); 4) (−6; 4); 5) (6; 3);
6) (5; −6), (−2; 1); 7) (2; −1), (8; 2); 8) (10; −6), (2; 2);
9) (4; 3), (4; −3), (−4; 3), (−4; −3);
10) (1; 5), (5; 1), (−1; −5), (−5; −1);
11) (2; 3), (−2; −3); 12) (3; 4), (4; 3); 13) (1; 2), (2; 1);
14) (2; 1), (1; 2), (−1; −2), (−2; −1);
15) (2; 2), (−2; −2), (−2; 2), (2; −2);
16) $\left(-4{,}5; 3\frac{5}{12}\right)$, (4; 2);
17) (9; 4); 18) (1; 8), (8; 1);
19) (27; 8), (8; 27); 20) (−1; 2), $\left(-1\frac{7}{8}; -\frac{3}{16}\right)$;
21) $\left(\frac{5}{\sqrt{2}}; -\frac{3}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(-\frac{5}{\sqrt{2}}; \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$, (1; 4), (−1; −4);
22) $\left(-\frac{7}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $\left(\frac{7}{\sqrt{3}}; -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, (2; 5), (−2; −5);
23) (2; 3), (−2; −3), $\left(\frac{26}{\sqrt{109}}; \frac{9}{\sqrt{109}}\right)$, $\left(-\frac{26}{\sqrt{109}}; -\frac{9}{\sqrt{109}}\right)$;
24) (3; −2), (−2; 3);
25) (0; 0), $\left(2\sqrt{2}; -2\sqrt{2}\right)$, $\left(-2\sqrt{2}; 2\sqrt{2}\right)$, (2; 2), (−2; −2),

$\left(\sqrt{3+\sqrt{5}}; \frac{\sqrt{3+\sqrt{5}}\left(3-\sqrt{5}\right)}{2}\right)$, $\left(-\sqrt{3+\sqrt{5}}; \frac{-\sqrt{3+\sqrt{5}}\left(3-\sqrt{5}\right)}{2}\right)$,

$\left(\sqrt{3-\sqrt{5}}; \frac{\sqrt{3-\sqrt{5}}\left(3+\sqrt{5}\right)}{2}\right)$, $\left(-\sqrt{3-\sqrt{5}}; \frac{-\sqrt{3-\sqrt{5}}\left(3-\sqrt{5}\right)}{2}\right)$;

26) (2; 0); 27) (3; 2); 28) (1; 2), (2; 1); 29) (6,5; −2,5);
30) (3; 2); 31) (25; 36); 32) $\left((-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n; \pi - (-1)^n\frac{\pi}{6} - \pi n\right)$, де $n \in Z$;
33) $\left(\pi n \pm \frac{\pi}{6} + \pi k; \pm\frac{\pi}{6} + \pi k - \pi n\right)$, де $n \in Z$; $k \in Z$;

34) $\left(\frac{\pi}{4}+\pi n+(-1)^k\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2};\ \frac{\pi}{4}+\pi n-(-1)^k\frac{\pi}{12}-\frac{\pi k}{2}\right)$, де $k\in Z$; $n\in Z$;

35) $\left(\frac{\pi}{2}+\pi n;\ \pm\frac{\pi}{3}+2\pi k\right)$, $\left(\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k;\ \frac{\pi}{2}+\pi n\right)$, де $k\in Z$; $n\in Z$.

Розділ 3. Нерівності та системи нерівностей

§ 1. Лінійні нерівності та нерівності другого степеня з однією змінною. Метод інтервалів

1) $\left(-\infty;-\frac{7}{8}\right)$; 2) $(-\infty;20)$; 3) $[1{,}6;+\infty)$; 4) $(-\infty;4{,}7]$;

5) $(1;+\infty)$; 6) $[-5;+\infty)$; 7) $(-\infty;2{,}25)$; 8) $(-8;6)$; 9) $\left(1;1\frac{1}{5}\right)$;

10) $[-4;4]$; 11) $\left(-\infty;-\sqrt{3}\right]\cup\left[\sqrt{3};+\infty\right)$; 12) $\left(-\frac{2}{3};0\right)$;

13) $\left(-\infty;-\frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{1}{3};+\infty\right)$; 14) $(-\infty;-1{,}5]\cup[8;+\infty)$;

15) $(-\infty;-2{,}5]\cup[0{,}5;+\infty)$; 16) $\left(\frac{15-\sqrt{201}}{2};\frac{15+\sqrt{201}}{2}\right)$;

17) $\left(-\frac{1}{2};4\right)$; 18) $(-\infty;-8)\cup(7;+\infty)$; 19) $\left[-6;1\frac{3}{4}\right]$;

20) $(-\infty;-2)\cup(1;+\infty)$; 21) $(-\infty;-5)\cup(3;2)$;

22) $(-4{,}5;-2)\cup(3;+\infty)$; 23) $(-\infty;+\infty)$; 24) $\{3\}$;

25) $\left(-\frac{2}{3};3\frac{1}{3}\right)$; 26) $(-\infty;-7]\cup[1;+\infty)$; 27) $(-4;6)$;

28) $(-0{,}5;3{,}5)$; 29) $(-0{,}75;2)$; 30) $(-\infty;0)\cup(6;+\infty)$.

§ 2. Тригонометричні нерівності

1) $\left(-\frac{\pi}{18}+\frac{2\pi n}{3};\frac{7\pi}{18}+\frac{2\pi n}{3}\right)$, де $n\in Z$;

2) $\left[-\frac{5\pi}{12}+\pi n;-\frac{\pi}{12}+\pi n\right]$, де $n\in Z$;

3) $\left[\frac{5\pi}{12}+\pi n;\frac{7\pi}{12}+\pi n\right]$, де $n\in Z$;

4) $\left(-\frac{3\pi}{8}+\pi n; \frac{3\pi}{8}+\pi n\right)$, де $n \in Z$;

5) $\left(-\frac{3\pi}{4}+\pi n; \frac{\pi}{12}+\pi n\right)$, де $n \in Z$;

6) $\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2}; \frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}\right)$, де $n \in Z$;

7) $\left(\frac{2\pi}{3}+2\pi n; 2\pi+2\pi n\right)$, де $n \in Z$;

8) $\left(\frac{\pi}{6}+\pi n; \frac{5\pi}{6}+\pi n\right)$, де $n \in Z$;

9) $\left[\frac{\pi}{3}+\pi n; \frac{2\pi}{3}+\pi n\right]$, де $n \in Z$;

10) $\left[4\,\mathrm{arctg}\,5+4\pi n; 2\pi+4\pi n\right)$, де $n \in Z$.

§ 3. Системи нерівностей

1) $[-0{,}4; +\infty)$; 2) $\left(-\infty; -\frac{5}{9}\right)$; 3) $[-11; 3]$; 4) $\left[18\frac{6}{7}; 27\right]$;

5) $\left(-\infty; 6\frac{1}{7}\right)$; 6) $(-\infty; -23)$; 7) розв'язків немає; 8) $(4; +\infty)$;

9) $(-1; 2)$; 10) $\left[-5\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right]$; 11) $[-0{,}56; 1{,}2]$.

§ 4. Ірраціональні, показникові, логарифмічні нерівності. Нерівності з параметрами

1) $\left(\frac{7}{8}; +\infty\right)$; 2) $(3; 12)$; 3) $[0; 3]$; 4) $(-\infty; -2]\cup\left[5; 5\frac{9}{13}\right)$;

5) $(-\infty; -5]\cup(-1; 0]$; 6) $[-1; 0)\cup[2; +\infty)$;

7) $(-\infty; -2]\cup(0; 4]$; 8) $(-\infty; -5]\cup(0; 2]$; 9) $(0{,}25; +\infty)$;

10) $(-\infty; -1)$; 11) $(-\infty; 1]$; 12) $[1; +\infty)$; 13) $[0; 1]$;

14) $[-1; +\infty)$; 15) $[-2; 2]$; 16) $[-1; 3]$; 17) $(-\infty; -1)\cup(1; +\infty)$;

18) $[-1; 0]$; 19) $(3; +\infty)$; 20) $(-\infty; 1]$; 21) $\left(-0{,}5; -\frac{7}{17}\right)$;

22) $(-\infty; 3-\sqrt{3})\cup(3+\sqrt{3}; +\infty)$; 23) $[-5; -4)\cup(0; 1]$;

24) $\left(-1; \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$; 25) $\left(0; \frac{1}{5}\right) \cup (25; +\infty)$; 26) $(2; +\infty)$;

27) $(0; 0{,}2] \cup [1; +\infty)$; 28) $\left(-\frac{1}{3}; 2\frac{2}{3}\right)$;

29) $(0; 0{,}008) \cup \left(\sqrt[3]{0{,}2}; 1\right)$; 30) $(0; 1) \cup \left(1; 1+\sqrt{3}\right)$;

31) $(0{,}8; 1) \cup (1; 4]$;

32) якщо $a = 5$, то x — будь-яке число; якщо $a < 5$, то $x < \frac{10}{5-a}$; якщо $a > 5$, то $x > \frac{10}{5-a}$;

33) якщо $a = -7$, то нерівність розв'язків не має; якщо $a < -7$, то $x < \frac{17}{a+7}$; якщо $a > -7$, то $x > \frac{17}{a+7}$;

34) якщо $a \geq 0$, то $x \in (-\infty; a) \cup (16a; +\infty)$; якщо $a < 0$, то $x \in (-\infty; 16a) \cup (a; +\infty)$.

Розділ 4. Функції та їх графіки

§ 1. Види функцій та їх властивості

1. 1) $(-\infty; -6) \cup (-6; 6) \cup (6; +\infty)$; 2) $(-\infty; +\infty)$;

3) $(-\infty; -3) \cup (-3; 0) \cup (0; 1) \cup (1; +\infty)$;

4) $(-\infty; +\infty)$; 5) $[2; +\infty)$; 6) $(-\infty; 4]$;

7) $(-\infty; -3) \cup (-3; 0) \cup (0; 4) \cup (4; +\infty)$;

8) $[9; +\infty)$; 9) $(-\infty; -4) \cup (-4; 1)$;

10) $[-5; 0) \cup (0; +\infty)$; 11) $(-\infty; +\infty)$;

12) $[0; 2) \cup (2; +\infty)$; 13) $(-\infty; +\infty)$;

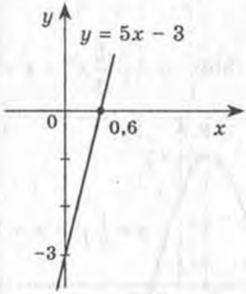
14) $(-\infty; -1) \cup (-1; 0] \cup [1; +\infty)$; 15) $[-2; 2)$; 16) $\left[-1; \frac{7}{22}\right]$;

17) $(-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$; 18) $(-\infty; -1) \cup (5; 6) \cup (6; +\infty)$.

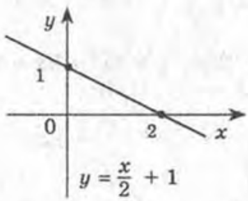
2. 1) $(-\infty;\ +\infty)$; 2) $[-1;\ 1]$; 3) $[-2;\ 2]$; 4) $(-\infty;\ +\infty)$; 5) $[2;\ +\infty)$; 6) $(-\infty;\ 3]$; 7) $(-\infty;\ -5]$; 8) $(-\infty;\ -6]$; 9) $[-13;\ +\infty)$; 10) $[-\infty;\ 7{,}25)$; 11) $[-7;\ +\infty)$; 12) $\left(-\infty;\ 3\frac{1}{12}\right]$; 13) $[0;\ +\infty)$; 14) $[-6;\ +\infty)$; 15) $(-\infty;\ 7]$.

3. 1) Ні парна, ні непарна; 2) ні парна, ні непарна; 3) парна; 4) ні парна, ні непарна; 5) парна; 6) ні парна, ні непарна; 7) ні парна, ні непарна; 8) непарна; 9) парна; 10) непарна.

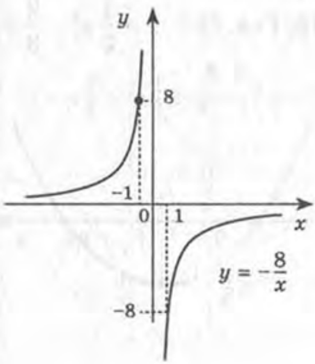
4. 1) Рис. 352. $y = 5x - 3$.



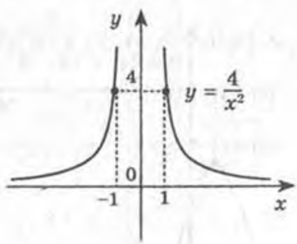
2) Рис. 353. $y = -\frac{x}{2} + 1$.



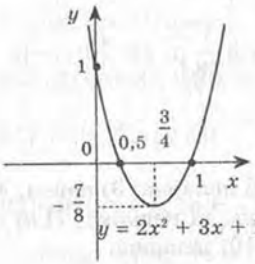
3) Рис. 354. $y = -\frac{8}{x}$.



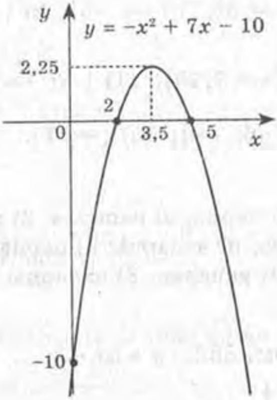
4) Рис. 355. $y = \frac{4}{x^2}$.



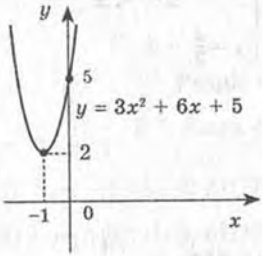
5) Рис. 356. $y = 2x^2 - 3x + 1$.



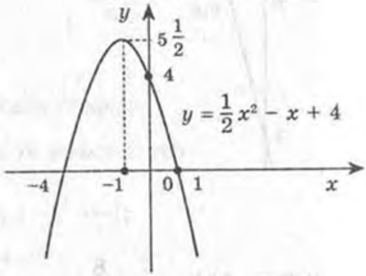
6) Рис. 357. $y = -x^2 + 7x - 10$.



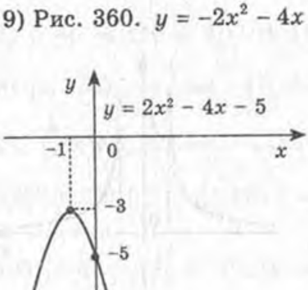
7) Рис. 358. $y = 3x^2 + 6x + 5$.



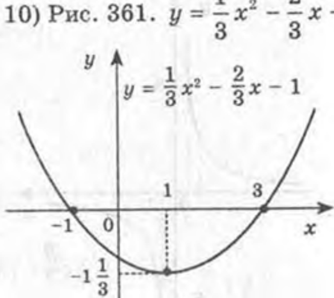
8) Рис. 359. $y = -\frac{1}{2}x^2 - x + 4$.



9) Рис. 360. $y = -2x^2 - 4x - 5$.



10) Рис. 361. $y = \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x - 1$.



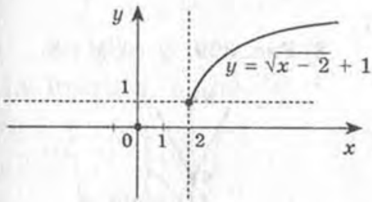
5. 1) $y = -\frac{x}{3} - \frac{7}{3}$; 2) $y = -\frac{x}{11} + \frac{27}{11}$;

3) $y = -\frac{9x}{5} - \frac{2}{5}$; 4) $y = -\frac{5x}{6} - \frac{8}{3}$.

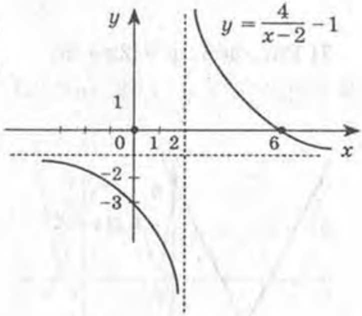
6. $y = x^2 + 2$, $b = 0$, $c = 2$.

§ 2. Перетворення графіків функції

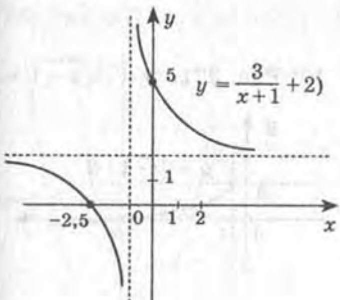
1) Рис. 362. $y = \sqrt{x-2} + 1$.



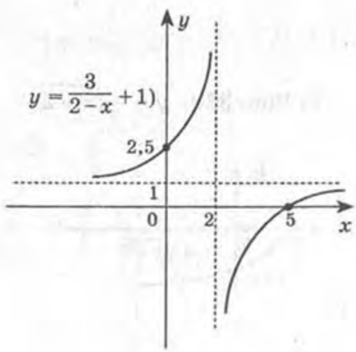
2) Рис. 363. $y = \frac{4}{x-2} - 1$.



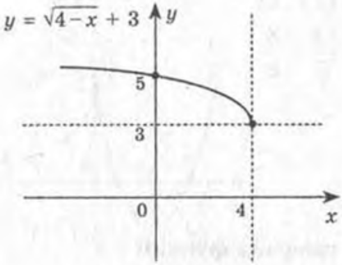
3) Рис. 364. $y = \frac{3}{x+1} + 2$.



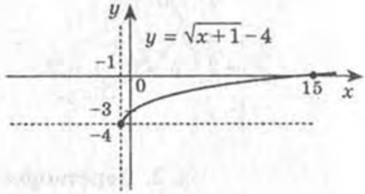
4) Рис. 365. $y = \frac{3}{2-x} + 1$.



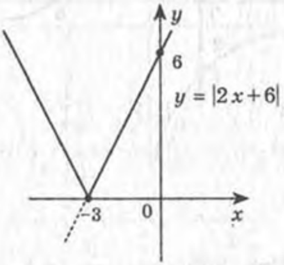
5) Рис. 366. $y = \sqrt{4 - x} + 3$.



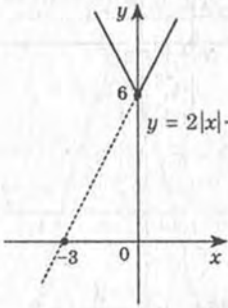
6) Рис. 367. $y = \sqrt{x + 1} - 4$.



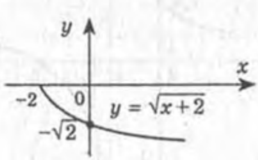
7) Рис. 368. $y = |2x + 6|$.



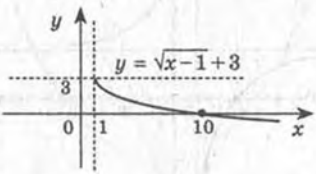
8) Рис. 369. $y = 2|x| + 6$.



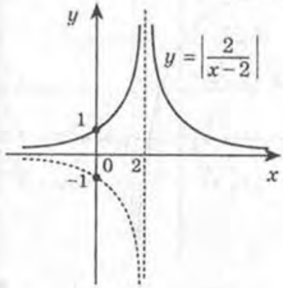
9) Рис. 370. $y = -\sqrt{x + 2}$.



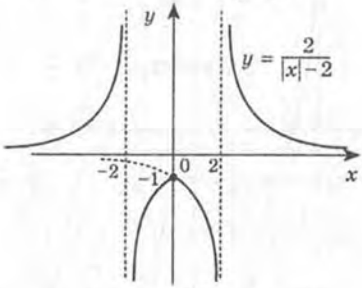
10) Рис. 371. $y = -\sqrt{x - 1} + 3$.



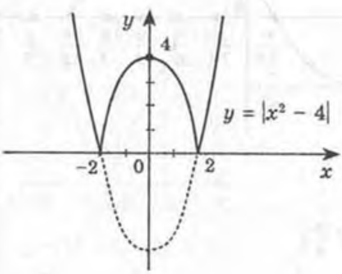
11) Рис. 372. $y = \left|\dfrac{2}{x-2}\right|$.



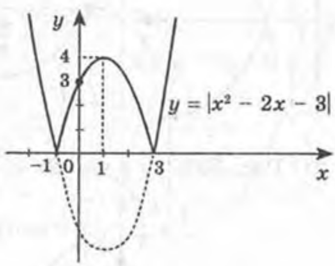
12) Рис. 373. $y = \dfrac{2}{|x|-2}$.



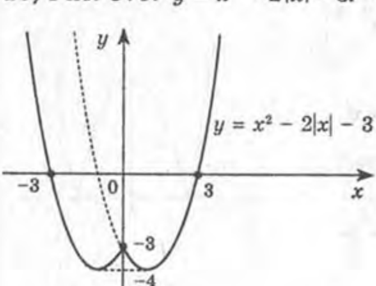
13) Рис. 374. $y = |x^2 - 4|$.



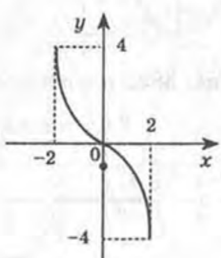
14) Рис. 375. $y = |x^2 - 2x - 3|$.



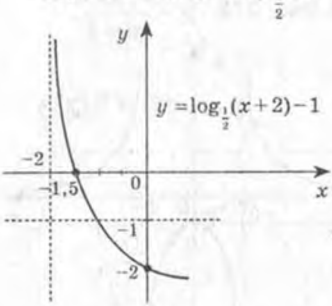
15) Рис. 376. $y = x^2 - 2|x| - 3$.

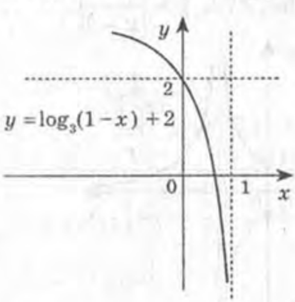


16) Рис. 377.

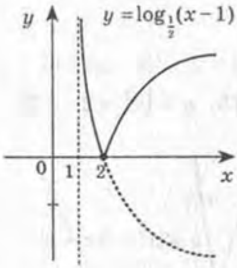


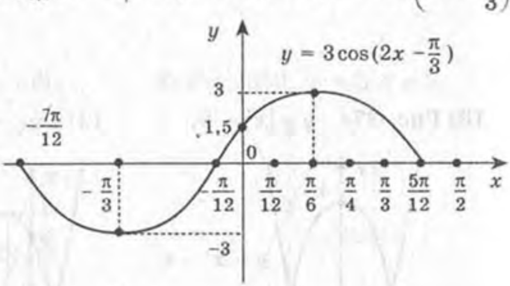
17) Рис. 378. $y = \log_{\frac{1}{2}}(x+2) - 1$. 18) Рис. 379. $y = \log_3(1-x) + 2$.



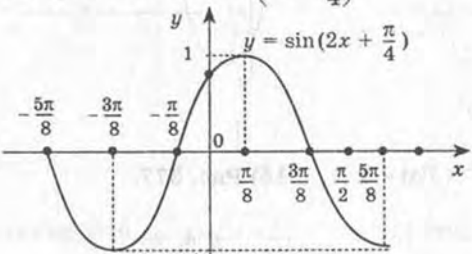


19) Рис. 380. $y = \left|\log_{0,2}(x-1)\right|$. 20) Рис. 381. $y = 3\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$.

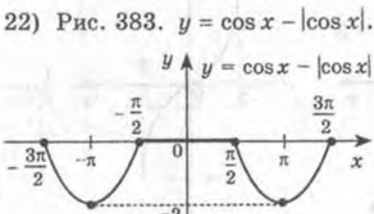




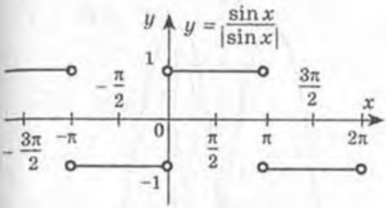
21) Рис. 382. $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$.



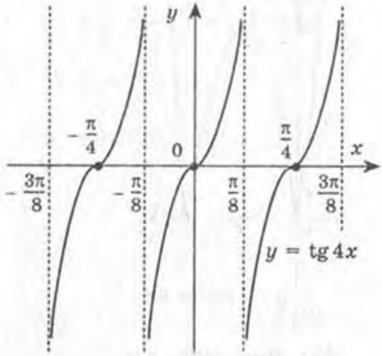
22) Рис. 383. $y = \cos x - |\cos x|$.



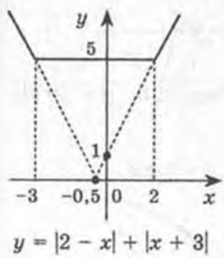
23) Рис. 384. $y = \dfrac{\sin x}{|\sin x|}$.



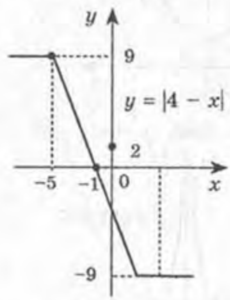
24) Рис. 385. $y = \operatorname{tg} 4x$.



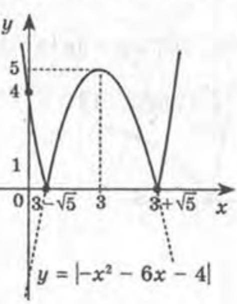
25) Рис. 386. $y = |2 - x| + |x + 3|$.



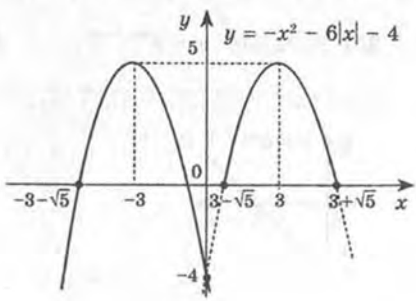
26) Рис. 387. $y = |4 - x| - |5 + x|$.



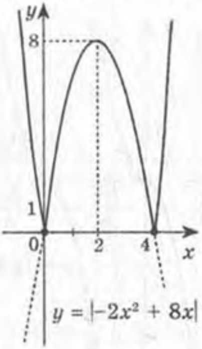
27) Рис. 388. $y = |-x^2 - 6x - 4|$.



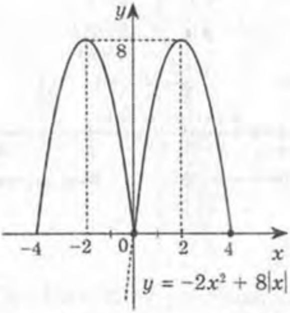
28) Рис. 389. $y = -x^2 - 6|x| - 4$.



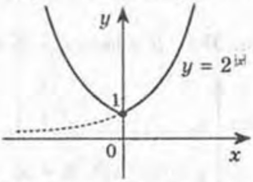
29) Рис. 390. $y = \left|-2x^2 + 8x\right|$.



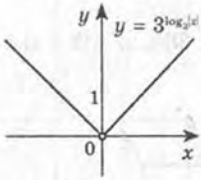
30) Рис. 391. $y = -2x^2 + 8|x|$.



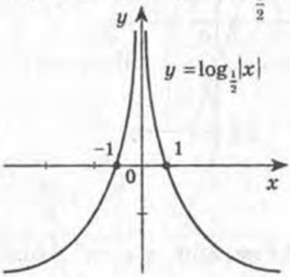
31) Рис. 392. $y = 2^{|x|}$.



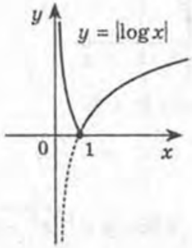
32) Рис. 393. $y = 3^{\log_3 |x|}$.



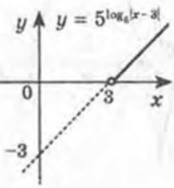
33) Рис. 394. $y = \log_{\frac{1}{2}} |x|$.



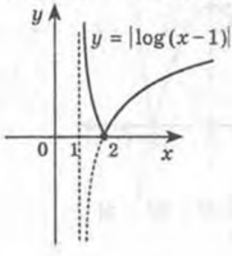
34) Рис. 395. $y = \left|\lg x\right|$.



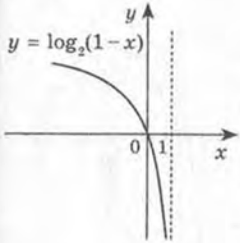
35) Рис. 396. $y = 5^{\log_5 (x-3)}$.



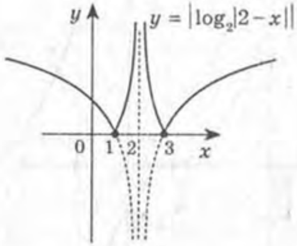
36) Рис. 397. $y = \left|\lg (x-1)\right|$.



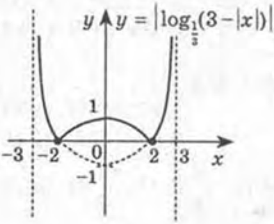
37) Рис. 398. $y = \log_2(1-x)$.



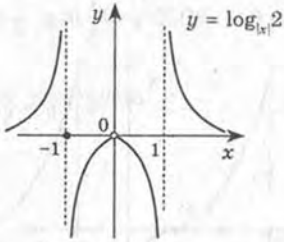
38) Рис. 399. $y = \left|\log_2|2-x|\right|$.



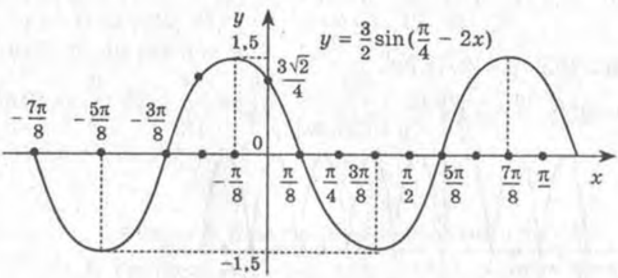
39) Рис. 400. $y = \left|\log_{\frac{1}{3}}(3-|x|)\right|$.



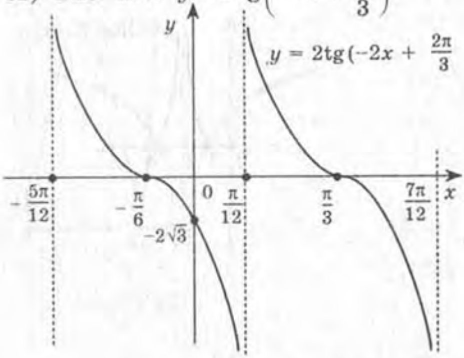
40) Рис. 401. $y = \log_{|x|} 2$.



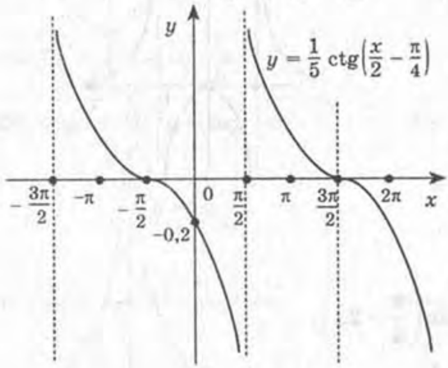
41) Рис. 402. $y = \dfrac{3}{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{4} - 2x\right)$.



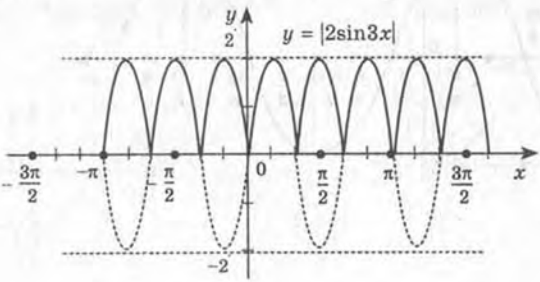
42) Рис. 403. $y = 2\,\mathrm{tg}\left(-2x + \dfrac{2\pi}{3}\right)$.



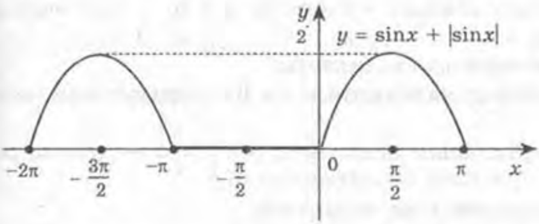
43) Рис. 404. $y = \dfrac{1}{5}\,\mathrm{ctg}\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{4}\right)$.



44) Рис. 405. $y = |2\sin 3x|$.



45) Рис. 406. $y = |\sin x| + \sin x$.



Розділ 5. Прогресії

§ 1. Арифметична прогресія

1) 8; 5; 2; 2) $a_1 = -4$, $d = 6$, чотири; 3) 690; 4) 3417; 5) 3528; 6) 1296; 7) а) так; б) ні; 8) $a_1 = -3$, $d = 4$; 9) $a_1 = 10$, $d = 4$; 10) $n = 6$; 11) $a_1 = 25$, $d = 4$; 12) $a_1 = 1$, $d = -3$; 13) 44; 14) $x = 10$ або $x = 2$; 15) $x = 1$.

§ 2. Геометрична прогресія

1) а) 33; б) 24,2;
2) 16256;
3) а) $16\frac{2}{3}$; б) $6\frac{3}{4}$; в) 16; г) 2;
4) $q = \frac{1}{3}$; $b_1 = 32$;
5) $x = 0$, $y = 0$ або $x = 3\frac{1}{3}$, $y = 1\frac{1}{3}$, або $x = -0{,}75$, $y = -0{,}3$;
6) а) $b_1 = 2$, $q = 3$ або $b_1 = 2$, $q = -3$; б) $b_1 = 6$, $q = -2$;
7) 1; 4; 16; 64; 8) −2; 1; 4 або 4; 1; −2;
9) 2; 6; 18 або 18; 6; 2;
10) а) $\frac{2}{3}$; б) $1\frac{1}{3}$; в) $\frac{25}{99}$; г) $\frac{56}{495}$; д) $6\frac{2}{15}$; е) $\frac{23}{900}$;
11) $x = 120$ або $x = 1$.

Розділ 6. Елементи математичного аналізу

§ 1. Границя функції. Асимптоти графіка функції

1. 1) −1; 2) −5; 3) 1,25; 4) 0,5; 5) $1\frac{1}{3}$; 6) 25; 7) −3; 8) 3,5; 9) 5; 10) 0,5; 11) 0,25; 12) 0,5; 13) 8; 14) 1; 15) 0,25.

2. 1) $x=0$ — вертикальна асимптота; $y=0$ — горизонтальна асимптота;
   2) $x=-2$ — вертикальна асимптота; $y=5$ — горизонтальна асимптота;
   3) $x=2$ — вертикальна асимптота;
   4) $x=1$ — вертикальна асимптота; $y=1$ — горизонтальна асимптота;
   5) $x=4$ — вертикальна асимптота; $y=x+4$ — похила асимптота;
   6) $y=0$ — горизонтальна асимптота;
   7) $x=0$ — вертикальна асимптота; $y=0$ — горизонтальна асимптота.

§ 2. Похідна

1. 1) $30\left(5x^3-2x^2+x-2\right)^{29}\left(15x^2-4x+1\right)$; 2) $-\dfrac{85}{x^6}$;

3) $-\dfrac{90}{7x\sqrt[7]{x^5}}$; 4) $\dfrac{7,5}{\sqrt[4]{2x+1}}$; 5) $\left(\dfrac{1}{7}x-3\right)^6$; 6) $\left(\dfrac{1}{8}x-5\right)^7$;

7) $\dfrac{2\operatorname{tg}x}{\cos^2 x}$; 8) $-\dfrac{2}{\sin^2 2x}$; 9) $-\dfrac{6x}{\left(x^2-1\right)^2}$;

10) $-\dfrac{12x}{\left(x^2-4\right)^2}$; 11) $-\dfrac{1}{x^2}$; 12) $\dfrac{2x+x^2}{(1+x)^2}$; 13) $(x-3)(3x-1)$;

14) $\dfrac{7}{5}x\sqrt[5]{x^2}$; 15) $3x^2\cos x-x^3\sin x+\dfrac{2}{\cos^2 x}$; 16) $5\sin 10x$;

17) $-2,5^{\cos x}\ln 2,5\sin x$; 18) $\dfrac{2}{x\ln 5}$; 19) $e^{x^3}+3x^2$;

20) $\dfrac{\cos(\ln x)}{2x\sqrt{\sin\ln x}}$; 21) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{x}}+7x^2\sqrt{x}-\dfrac{3}{x^4}$;

22) $-\dfrac{12}{\ln 10\,(10-x)(x+2)}$; 23) $\dfrac{x}{x^2-1}$; 24) $2x\cos\dfrac{1}{x}+\sin\dfrac{1}{x}$;

25) $\dfrac{1}{2}\sin x$; 26) $2\sin 2x$; 27) $\dfrac{4x\cos 2x-\sin 2x}{2x\sqrt{x}}$; 28) $-\dfrac{3}{x}$;

29) $x^{\sin x}\left(\cos x\ln x+\dfrac{\sin x}{x}\right)$;

30) $\left(2x^2+3x\right)^x\left(\ln\left(2x^2+3x\right)+\dfrac{4x+3}{2x+3}\right)$.

2. 45°. 3. 1) $y=\frac{2}{3}\left(x+\frac{1}{2}\right)+\ln 3$; 2) $y=\frac{x}{e}$; 3) $y=3ex-2e^2$;

4) $y=x-e$; 5) $y=-\frac{1}{2}(x-1)+1$.

4. (2; 0). 5. 40 м/с; 36 м/с². 6. 24 Н. 7. $y=3x-1$.

§ 3. Застосування похідної

1. 1) Спадає на проміжках $(-\infty; -1)$, $(0; 1)$; зростає на проміжках $(-1; 0)$, $(1; +\infty)$.

   2) Зростає, якщо $x\in(-\infty; 1)$, $x\in(1; +\infty)$; спадає, якщо $x\in(-1; 0)$, $x\in(0; 1)$.

   3) Зростає, якщо $x\in(-\infty; -2\sqrt{2})$, $x\in(2\sqrt{2}; +\infty)$; спадає, якщо $x\in(-2\sqrt{2}; 2\sqrt{2})$.

   4) Зростає, якщо $x\in(1; +\infty)$; спадає, якщо $x\in(-\infty; 0)$, $x\in(0; 1)$.

   5) Зростає, якщо $x\in\left(-\frac{\pi}{4}+\pi n; \frac{\pi}{4}+\pi n\right)$;

   спадає, якщо $x\in\left(\frac{\pi}{4}+\pi n; \frac{3\pi}{4}+\pi n\right)$.

   6) Зростає, якщо $x\in(-\infty; -1)$, $x\in(1; +\infty)$; спадає, якщо $x\in(-1; 0)$, $x\in(0; 1)$.

   7) Зростає, якщо $x\in(-1; 1)$, $x\in(3; +\infty)$; спадає, якщо $x\in(-\infty; -1)$, $x\in(1; 3)$.

   8) Зростає, якщо $x\in(-\infty; -2)$, $x\in(0; +\infty)$; спадає, якщо $x\in(-2; -1)$, $x\in(-1; 0)$.

   9) Зростає, якщо $x\in(1; +\infty)$; спадає, якщо $x\in(0; 1)$.

   10) Зростає, якщо $x\in(0; +\infty)$; спадає, якщо $x\in(-\infty; 0)$.

   11) Зростає, якщо $x\in(-\infty; -3)$, $x\in(-3; +\infty)$.

   12) Зростає, якщо $x\in(-\infty; -2)$, $x\in(-2; 0)$; спадає, якщо $x\in(0; 2)$, $x\in(2; +\infty)$.

2. 1) $x_{\max}=-3$, $x_{\min}=21$; 2) $x_{\max}=-2$, $x_{\min}=6$; 3) $x_{\min}=\frac{1}{6}$;

   4) $x_{\max}=-10$, $x_{\min}=2$; 5) $x_{\min}=-\frac{1}{4}$, $x_{\max}=0$, $x_{\min}=1$.

3. 1) $y_{\max}=54$, $y_{\min}=-54$; 2) екстремумів немає;

   3) $y_{\max}=\frac{1}{2}$, $y_{\min}=-\frac{1}{6}$; 4) $y_{\min}=-4$, $y_{\max}=0$;

5) $y_{\min} = 0$, $y_{\max} = 16$; 6) $y_{\max} = -3$, $y_{\min} = 5$;

7) $y_{\max} = 8 - \dfrac{8}{\sqrt{2}}$, $y_{\min} = 8 + \dfrac{8}{\sqrt{2}}$; 8) $y_{\min} = 0$; 9) $y_{\min} = \dfrac{1}{4} - \ln 2$;

10) $y_{\max} = 1$; 11) $y_{\max} = \dfrac{1}{e}$; 12) $y_{\min} = 3 - 3\ln 3$.

4. 1) $y_{\max} = y(2) = 11\dfrac{2}{3}$, $y_{\min} = y(-1) = -15\dfrac{1}{3}$;

2) $y_{\max} = y(4) = 32$, $y_{\min} = y(2) = -4$;

3) $y_{\max} = y(1) = 2\dfrac{1}{8}$, $y_{\min} = y(4) = 1$;

4) $y_{\min} = y(0) = 1$, $y_{\max} = y(2) = 2 + \dfrac{1}{e^2}$;

5) $y_{\max} = y(1) = 1$, $y_{\min} = y(9) = 3$;

6) $y_{\max} = y(-1) = 5$, $y_{\min} = y(2) = -4$;

7) $y_{\max} = y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 4$, $y_{\min} = y(0) = y(\pi) = 1$;

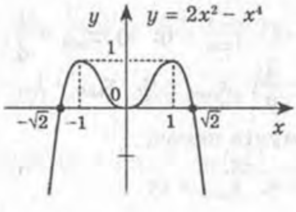
8) $y_{\max} = y(1) = 1$, $y_{\min} = y(2) = 0$;

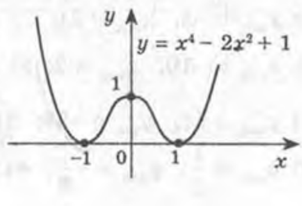
9) $y_{\min} = y\left(e^{-\frac{1}{2}}\right) = -\dfrac{1}{2e}$, $y_{\max} = y(1) = 0$;

10) $y_{\max} = y(e) = \dfrac{1}{e}$, $y_{\min} = y(1) = 0$.

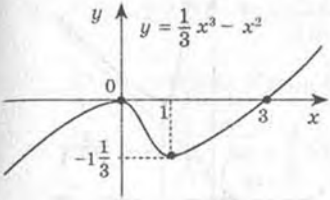
5. 12 см і 12 см. **6.** 3 і 3. **7.** −3,5 і 3,5.

8. 1) Рис. 407. $y = 2x^2 - x^4$. 2) Рис. 408. $y = x^4 - 2x^2 + 1$.

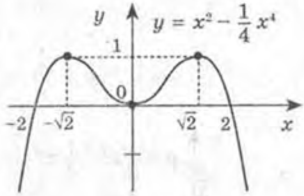




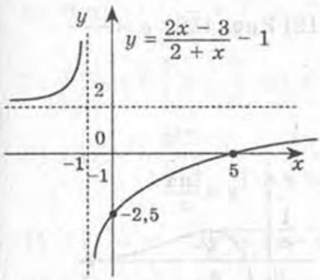
3) Рис. 409. $y = 13x^3 - x^2$.



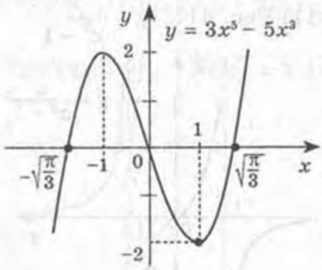
4) Рис. 410. $y = x^2 - \frac{1}{4}x^4$.



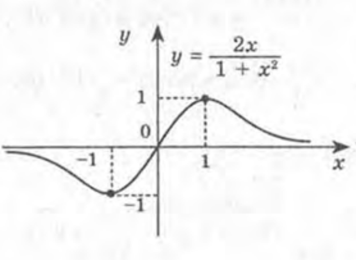
5) Рис. 411. $y = \frac{2x-3}{2+x} - 1$.



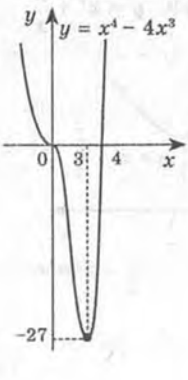
6) Рис. 412. $y = 3x^5 - 5x^3$.



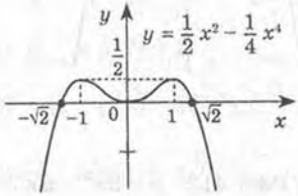
7) Рис. 413. $y = \frac{2x}{1+x^2}$.



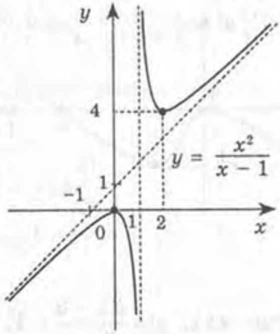
8) Рис. 414. $y = x^4 - 4x^3$.



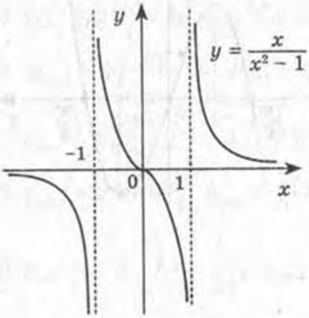
9) Рис. 415. $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4$.



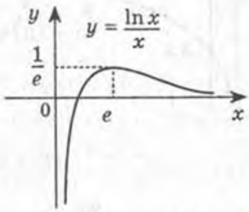
10) Рис. 416. $y = \frac{x^2}{x-1}$.



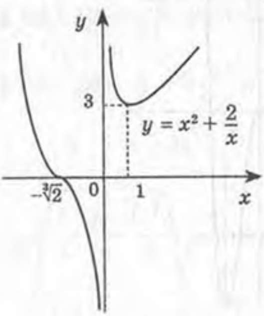
11) Рис. 417. $y = \frac{x}{x^2-1}$.



12) Рис. 418. $y = \frac{\ln x}{x}$.



13) Рис. 419. $y = x^2 + \frac{2}{x}$.



§ 4. Первісна

1. 1) $F(x) = 2\ln|2x-3| + \dfrac{2^{3x+4}}{3\ln 2} + 7x + C;$

2) $F(x) = -\operatorname{ctg} 3x + 4\sin\dfrac{x}{4} + \dfrac{1}{4}e^{6-4x} + 4x^2 - x + C;$

3) $F(x) = -3\sqrt{6-2x} + \dfrac{3}{5}x\sqrt[3]{x^2} + \dfrac{8}{7}x^7 - 4x + C;$

4) $F(x) = -\dfrac{1}{2}\cos(2x-3) + \dfrac{1}{3}\operatorname{tg}(5-3x) + \dfrac{1}{8}e^x + C;$

5) $F(x) = -\dfrac{45}{2}\sqrt[3]{6-2x} + \dfrac{3}{8(x+1)^8} + \dfrac{3}{6}\ln|6x-1| + 10x + C;$

6) $F(x) = -\dfrac{3^{1-x}}{\ln 3} + \dfrac{5}{24}(1-3x)\sqrt[5]{(1-3x)^3} - 10\ln|1-x| - 8\cos\dfrac{x}{2} + C;$

7) $F(x) = 3\dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{48}(6x+1)^8 - \dfrac{1}{3}\sin(3x-8) + \dfrac{20}{3}\sqrt{3x+5} + C;$

8) $F(x) = -\dfrac{4^{1-x}}{\ln 4} - \dfrac{3}{4(6-8x)^4} - \dfrac{4}{3}\operatorname{tg}(2-3x) + x\ln 2 + C.$

2. 1) $F(x) = x^3 - 2x^2 + 5x - 4;$

2) $F(x) = x^4 - x^2 + 3x + 5;$

3) $F(x) = \sqrt{4x+5} + 2;$

4) $F(x) = 2x^3 + 4e^{4x} - 1 - 15e^2;$

5) $F(x) = 5\sqrt{x} + \dfrac{x^2}{2} - 15;$

6) $F(x) = 6\sqrt{4x-3};$

7) $F(x) = 2e^{2x-1} + e;$

8) $F(x) = \operatorname{tg} 6x + 2\sqrt{3}.$

§ 5. Інтегрування

1. 1) $-\dfrac{1}{8(2x+3)^4} + C;$ 2) $\dfrac{1}{8(8-4x)^6} + C;$ 3) $-\dfrac{1}{15}\ln|8-15x| + C;$

4) $\frac{1}{x}-\frac{1}{4}\sin 2x+C$; 5) $\frac{5}{22}x^4\sqrt[5]{x^2}+C$;

6) $\frac{6}{7}x^2\sqrt[3]{x}+\frac{18}{7}x\sqrt[6]{x}+C$;

7) $\frac{1}{3\ln 2}2^{3x+4}+C$;

8) $\frac{4}{3}\sqrt{3x-4}+4x\cos\frac{x}{4}-\ln|9-5x|-\operatorname{ctg}4x+C$;

9) $\frac{1}{6}(2x-3)\sqrt[5]{(2x-3)^3}-\frac{1}{8}e^{6-8x}-\frac{5^{3-x}}{\ln 5}+\frac{1}{3}x+C$;

10) $-\frac{8}{35(5-7x)^5}+\frac{1}{7}\sin(4-7x)-9\operatorname{tg}\frac{x}{3}+x\ln 3+C$.

2. 1) 12; 2) 18; 3) $1-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $4\ln 3-4$; 5) $1-\frac{\sqrt{2}}{2}$; 6) $\frac{\sqrt{3}}{3}$;

7) 4; 8) 5; 9) $\frac{\pi}{2}$; 10) $\frac{\pi}{2}$; 11) 3; 12) $\frac{\pi}{4}$; 13) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; 14) 0;

15) $-101\frac{1}{4}$.

§ 6. Застосування інтегралів

1. $S=\frac{t^3}{3}+t^2-t$. 2. $S=-\frac{\cos 2t}{4}+2$. 3. $S=4\sin\frac{t}{2}+2$.

4. 1) $4\frac{1}{2}$; 2) $5\frac{5}{24}$; 3) 36; 4) $\frac{1}{2}$; 5) $\frac{1}{6}$; 6) $\frac{1}{2}$; 7) $\ln 2-\frac{1}{2}$; 8) $\frac{1}{3}$;

9) $24-7\ln 7$; 10) $1\frac{1}{3}$; 11) $4-1\frac{1}{2}\ln 2$; 13) $7\ln 3$; 14) $\frac{11}{12}$;

15) $4\frac{1}{2}$; 16) $\frac{1}{3}+\ln 3$; 17) $6\frac{3}{4}$; 18) 1,6; 19) $12-5\ln 5$.

5. $2\frac{2}{3}$. 6. 9. 7. 3,25. 8. $\frac{1}{12}$.

9. 1) $\frac{15\pi}{2}$; 2) $\frac{16\pi}{15}$; 3) $\frac{2\pi}{15}$; 4) $16\frac{2}{3}\pi$.

Розділ 7. Комбінаторика. Елементи теорії ймовірностей та статистики

§ 1. Правила суми, добутку. Перестановки. Розміщення. Комбінації

1. $C_{10}^4 = \dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 210.$

2. $A_9^3 = 9 \cdot 8 \cdot 7 = 504.$

3. $C_{15}^5 = \dfrac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 3003.$

4. $C_{16}^4 \cdot C_{10}^2 = \dfrac{16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \dfrac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2} = 1820 \cdot 45 = 81900.$

5. $A_8^4 = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1680.$

6. $A_4^4 - A_3^3 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 - 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24 - 6 = 18.$

7. $C_{12}^5 = \dfrac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 792.$

8. $C_9^2 \cdot C_5^1 \cdot C_4^1 \cdot C_2^1 = 5 \cdot 4 \cdot 2 \cdot \dfrac{9 \cdot 8}{1 \cdot 2} = 1440.$

9. $A_{80}^2 \cdot C_{78}^3 = 80 \cdot 79 \cdot \dfrac{78 \cdot 77 \cdot 76 \cdot 75}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 9015006000.$

10. $$\begin{aligned}
&C_2^2 \cdot \left(C_4^4 + C_4^3 \cdot C_1^1 + C_4^2 \cdot C_2^2 + C_4^1 \cdot C_3^3 + C_4^4\right) + \\
&+C_2^1 C_1^1 \left(C_4^4 + C_4^3 \cdot C_1^1 + C_4^2 \cdot C_2^2 + C_4^1 \cdot C_3^3 + C_4^4\right) + \\
&+C_2^2 \left(C_4^4 + C_4^3 \cdot C_1^1 + C_4^2 \cdot C_2^2 + C_4^1 \cdot C_3^3 + C_4^4\right) = \\
&= \left(2C_4^4 + C_4^3 \cdot C_1^1 + C_4^2 \cdot C_2^2 + C_4^1 \cdot C_3^3\right)\left(C_2^2 + C_1^1 \cdot C_1^1 + C_2^2\right) = \\
&= \left(2 \cdot 1 + \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{4 \cdot 2}{1 \cdot 2} + \frac{4}{1} \cdot 1\right) + \left(1 + \frac{2}{1} + 1\right) = \\
&= (2 + 4 + 4 + 4)(1 + 2 + 1) = 14 \cdot 4 = 64.
\end{aligned}$$

11. $C_{20}^5 - C_{17}^3 = \dfrac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \dfrac{17 \cdot 16 \cdot 15}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 15504 - 680 = 14824.$

12. $C_{15}^4 \cdot C_{10}^3 \cdot C_{12}^5 \cdot C_{20}^1 = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cdot \frac{20}{1} =$
$= 1365 \cdot 120 \cdot 792 \cdot 20 = 2594592000.$

13. 1) $T_4 = C_6^3 \cdot a^3 2^3 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 8a^3 = 160a^3;$

2) $T_9 = C_{10}^8 a^2 \left(\sqrt{b}\right)^8 = C_{10}^2 a^2 b^4 = 45a^2b^4;$

3) $T_5 = C_{11}^4 \left(a^2\right)^7 b^4 = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} a^{14}b^8 = 330a^{14}b^8;$

4) $T_5 = C_8^4 \left(\sqrt{a}\right)^4 \left(-\sqrt{b}\right)^4 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} a^2b^2 = 70a^2b^2.$

14. 1) $T_{13} = 77520a^7$; 2) $T_k = 3003$; 3) $T_{11} = 66x^{\frac{22}{3}}$; 4) $T_9 = 24310$.

15. 1) $n = 35$; 2) $= 9$.

16. $x = 2$. 17. $30^2 \cdot 10^4 = 900 \cdot 1000 = 9000000$. 18. 60.

§ 2. Елементи теорії ймовірностей

1. 0,3. 2. $\frac{3}{13}$. 3. $\frac{1}{6}$. 4. $\frac{89}{99}$.

5. $\frac{C_m^2}{C_{m+n}^2} = \frac{m \cdot (m-1)}{(m+n)(m+n-1)}$. 6. $\frac{1}{504}$.

7. $\frac{C_n^1 C_m^1 C_k^1}{C_{n+m+k}^3} = \frac{6n \cdot m \cdot k}{(n+m+k)(n+m+k-1)(n+m+k-2)}$.

8. $\frac{P_4 \cdot P_3}{P_{10}} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10} = \frac{6}{25200} = \frac{1}{4200}$.

9. $\frac{C_5^4 \cdot C_{11}^1}{C_{15}^5} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot 11 \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11} =$
$= 55 \frac{1}{7 \cdot 13 \cdot 3 \cdot 11} = \frac{55}{7 \cdot 13 \cdot 3 \cdot 11} = \frac{5}{273}$.

10. $\dfrac{C_4^2C_2^1}{C_6^3}=\dfrac{4\cdot3}{1\cdot2}\cdot\dfrac{2}{1}\cdot\dfrac{1\cdot2\cdot3}{6\cdot5\cdot4}=\dfrac{12\cdot2\cdot3}{6\cdot5\cdot4}=\dfrac{3}{5}$.

11. а) $\dfrac{1}{2}$; б) $\dfrac{5}{8}$; 12. а) $\dfrac{2}{5}$; б) $\dfrac{8}{29}$; в) $\dfrac{5}{14}$.

13. а) 0,56; б) 0,965; в) 0,14; г) 0,425.

14. а) $\dfrac{80}{243}$; б) $\dfrac{12}{729}$.

§ 3. Елементи статистики

1. 1) $Mo=1$, $Me=2{,}5$, $\bar{x}=3{,}125$;

2) $Mo=4$, $Me=4{,}5$, $\bar{x}=5{,}125$;

3) $Mo=2$, $Me=3$, $\bar{x}=3\dfrac{9}{11}$;

4) $Mo_1=2$, $Mo_2=4$, $Me=3{,}5$, $\bar{x}=3\dfrac{7}{12}$.

2. 1) $Mo=2$, $Me=2$, $\bar{x}\approx2{,}1$, $\sigma\approx2{,}5$;

2) $Mo_1=6$, $Mo_2=8$, $Me=6$, $\bar{x}\approx5{,}6$, $\sigma\approx2{,}6$.

Розділ 8. Геометрія

§ 1. Трикутники. Коло і круг

1. 8 і 15 см. 2. $\dfrac{8}{3}$, $\dfrac{25}{3}$ і 5 см. 3. 6,25 см. 4. $\dfrac{\sqrt{2}ab}{a+b}$.

5. 50 см. 6. 12 см. 7. 1 см. 8. $\dfrac{\sqrt{3}-1}{4}a^2$. 9. 8 см.

10. 20 см^2. 11. 24 см^2. 12. 294 см^2. 13. 16π см^2. 14. 1,5 см.

15. $\dfrac{29}{4}$ см. 16. 6 і 8 см. 17. $\sqrt{2}-1$. 18. $\sqrt{5}$ см. 19. $\dfrac{R^2\sqrt{3}}{4}$.

20. $\sqrt{3}$ см. 21. 25π см^2. 22. $\frac{80}{3}$ см. 23. 580 см.

24. $6\sqrt{5}$ см. 25. 77 см. 26. 61 см. 27. 10 см. 28. $\frac{r\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}{\sin 2\alpha}$.

29. $2r\cdot\operatorname{ctg}\frac{\pi-\alpha}{4}$. 30. $4R\cos\alpha(1+\sin\alpha)$. 31. r^2+2Rr.

32. 2 см. 33. 3, 4, 5 см. 34. $m\sqrt{\frac{m+n}{m-n}}$, $n\sqrt{\frac{m+n}{m-n}}$, $m+n$.

35. 4 см, 16π см^2. 36. 4 м, 3 м. 37. 400π см^2.

§ 2. Чотирикутники

1. $16\sqrt{3}$ см^2. 2. $2a^2\cos^2\frac{\alpha}{2}\sin\alpha$. 3. 30 см. 4. 13,44 см.

5. 10 см, 15 см. 6. 24 см. 7. $\frac{8R}{\sin\alpha}$. 8. 150 см^2. 9. $\frac{85}{8}$ см.

10. $2\sqrt{2}d\cos\left(\frac{m-n}{m+n}\cdot\frac{\pi}{4}\right)$. 11. $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ см. 12. 15 і 30 см.

13. $3\sqrt{3}$ см. 14. $\frac{\sqrt{2S}}{4}$. 15. 96 см^2. 16. 1024 см^2. 17. 5 см.

18. 450 см^2. 19. 168 см^2. 20. 28,5 см. 21. 30°. 22. $\frac{m^2-p^2}{4}$.

23. $12\sqrt{3}$ см^2. 24. 9,6 см^2. 25. 256 см^2. 26. 6 м.

27. $\frac{1}{2}\sqrt{ab+\frac{(a-b)^2}{4\cos^2\alpha}}$. 28. 6. 29. 7. 30. 45.

§ 3. Основні поняття та теореми стереометрії

1. 9 см. 2. $m\cos\alpha$, $m\sin\alpha$. 3. 7,5 см. 20,5 см. 4. 21 см.

5. 8 см, 17 см. 6. 5,1 см. 7. 14 см. 8. $\sqrt{a^2-\frac{l^2}{8}}$. 9. 2,5 см.

10. 8 см. 11. 16 см, 9 см, 20 см, 15 см. 12. 13 см. 13. 15 см.

14. $\dfrac{h\sqrt{2}}{\sin\varphi}$. 15. 60°. 16. 36 см^2. $18\sqrt{2}$ см^2. 17. 60°. 18. $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

19. 30°. 20. 1) a; 2) $\dfrac{a}{\sqrt{2}}$. 21. 1) $\dfrac{ac}{\sqrt{a^2+c^2}}$; 2) $\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

22. 6 см. 23. 12 см.

§ 4. Многогранники

1. 1280 см^3. 544 см^2. 2. 50 см^2. 3. 540 см^2. 4. 36 см^3. $36\sqrt{2}$ см^2.

5. 144 см^3. 6. $\dfrac{a^3\sqrt{3\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}-1}}{24}$. 7. $\dfrac{l^3\sqrt{3}\sin 2\alpha\cos\alpha}{8}$. 8. $\dfrac{125\sqrt{3}}{9}$.

9. $\dfrac{c^3\sin 2\alpha\operatorname{tg}\beta}{24}$. 10. $\dfrac{2}{3}R^3\sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha+\beta)\operatorname{tg}\varphi$.

11. $\dfrac{2H^3\operatorname{ctg}^2\beta(1+\sin\alpha)^2}{3\sin 2\alpha}$. 12. $\dfrac{c^2}{4}\sin 2\alpha\dfrac{1+\cos\beta}{\cos\beta}$.

13. $\dfrac{a^2}{4}\sqrt{3+12\operatorname{tg}^2\alpha}$. 14. $2b^2\sqrt{3}\sin\dfrac{\alpha}{2}\sin\left(60^\circ+\dfrac{\alpha}{2}\right)$.

15. $\dfrac{d^2\sin 2\alpha\cos^2\frac{\varphi}{2}}{\cos\varphi}$. 16. 4 см. 17. $\dfrac{1}{4}a^2\left(\sqrt{3}+\sqrt{15}\right)$.

18. 1 см. 19. $a^2\sqrt{3}$. 20. $\dfrac{2a^2\sin\alpha\cos^2\frac{\beta}{2}}{\cos\beta}$. 21. $\dfrac{a^2\sqrt{3}(1+2\sin\beta)}{4\cos\beta}$.

22. $\dfrac{h^3\operatorname{tg}\alpha}{3\sin 2\beta(1+\sin\beta)}$. 23. $\dfrac{c^2\cos\beta}{2\cos\alpha}\left(\dfrac{\sin\alpha}{1+\operatorname{ctg}\beta}+\sin\beta\right)$.

24. $\dfrac{a^2\cos\frac{\alpha}{2}}{4}\left(\operatorname{tg}\beta+\dfrac{1}{\cos\beta\cdot\sin\frac{\alpha}{2}}\right)$. 25. $\dfrac{2}{3}r^3\operatorname{ctg}^3\dfrac{\beta}{2}\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\sin\beta$.

26. $\dfrac{mnc^2\sqrt{4b^2-c^2}}{12(m^2+n^2)}$. 27. $\dfrac{H^3\sqrt{3}}{2}$. 28. $\dfrac{9\sqrt{2}}{8}$ см^3.

29. $S\sqrt{3}$. 30. $\dfrac{a\sqrt{4b^2-a^2}}{2(a+2b)}\operatorname{tg}\alpha$. 31. $\dfrac{c^2\sin 2\alpha}{4\cos\beta}$

32. $\dfrac{2}{3}a^3\operatorname{tg}^2\beta\operatorname{ctg}\varphi$. 33. $a-b$.

34. $\frac{ab(a^2+b^2+ab)}{3(a+b)}$ 35. 54 дм^2;

36. $V=\frac{1}{6}a^3(3\sqrt{3}-1)\operatorname{tg}\varphi$. $S=\frac{2a^2(1+2\cos\varphi)}{\cos\varphi}$.

§ 5. Тіла обертання

1. $\frac{\pi a^3}{4}$. 2. $\pi\frac{d^3\sqrt{2}}{16}$. 3. $\frac{\pi d^3}{4}\sin^2\alpha\cos\alpha$.

4. $\frac{\pi RS}{2}$. 5. $\sqrt{H^2+\frac{4V}{\pi H}}$. 6. $2\pi r^3\sin\frac{\beta}{2}$.

7. $\frac{\pi d^3\operatorname{tg}\alpha}{\cos^3\frac{\beta}{2}}$. 8. $\frac{\pi l^3\cos^2\beta\sin\beta}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}$. 9. $\frac{\pi S^2}{4H\cos^2\frac{\varphi}{2}}$.

10. $\frac{\sqrt{256\pi^2V^4+S^6}}{4\pi SV}$. 11. $2\sqrt{3}dH$.

12. $\frac{2\pi d^2\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}{\sin2\alpha}$; $\frac{2\pi d^3}{3\sin2\alpha\sin\alpha}$. 13. $\arcsin\frac{P-S}{S}$.

14. $\frac{\pi b^3\sin^2\alpha}{3}$; $\pi b^2\sin\alpha\left(1+2\sin\frac{\alpha}{2}\right)$. 15. $\frac{\pi c^3\sin^2\alpha}{12}$.

16. $\frac{\sqrt{2}\pi p^3\sin^2 2\alpha}{48\cos^3\frac{\alpha}{2}\cos^3\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}$. 17. $\frac{2}{3}\pi a^3\operatorname{ctg}^2\alpha$.

18. $2\pi a^3\sin\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2}$. 19. $\pi\left(\frac{Rd}{H}\right)^2$. 20. $\frac{R^2\sqrt{7}}{4}$.

21. $\frac{2\pi^2R^3}{3(\pi^2-1)}$. 22. 84π см^3. 23. $\frac{1}{3}\pi(R^3-r^3)$.

24. 7 см. 25. $2\pi(R^2-r^2)$.

26. $\frac{1}{2h}\left(m^2\pm\sqrt{\frac{12Vh}{\pi}-3m^4}\right)$.

27. 36π см^2. 28. 10 см.

29. 12 см. 30. $\frac{\pi d^2}{16}$.

31. $\dfrac{\pi R^3 \operatorname{ctg}^3 \dfrac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \alpha}{3}$. 32. $\dfrac{4\pi l^3}{3} \cos^3 \alpha \operatorname{tg}^3 \dfrac{\alpha}{2}$.

33. $\dfrac{ab\sqrt{a^2+b^2} \cdot \operatorname{tg} \alpha}{12}$. 34. $\dfrac{\pi l^2}{\cos \alpha \left(4 + \operatorname{tg}^2 \alpha\right)}$.

35. $4a^2 \cos \alpha \operatorname{ctg}^2 \dfrac{\alpha}{2}$; $\dfrac{4}{3} a^3 \cos^3 \alpha \operatorname{ctg}^3 \dfrac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg} \alpha$.

36. $2\sqrt{R^2 - \dfrac{a^2}{3}}$. 37. $\dfrac{\pi b^4}{h^2}$. 38. 3 см. 39. $56R^2$.

40. $\dfrac{6r^2\sqrt{3} \cos^2 \dfrac{\alpha}{2} \operatorname{ctg}^2 \dfrac{\alpha}{2}}{\cos \alpha}$. 41. $2\pi R^2 \sin \alpha \cos \dfrac{\alpha}{2}$.

42. $\dfrac{8\sqrt{3}}{27} R^3$. 43. $\dfrac{2a\sqrt{33}}{11}$; $\dfrac{a\sqrt{11}}{\sqrt{3}\left(3\sqrt{5}+1\right)}$.

44. $\dfrac{b^2}{2h}$; $\dfrac{h\sqrt{b^2-h^2}}{\sqrt{b^2-h^2}+\sqrt{b^2+3h^2}}$. 45. $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$; $\dfrac{a\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}-1\right)$.

46. $\dfrac{a^2+2h^2}{4h}$; $\dfrac{ah}{a+\sqrt{a^2+4h^2}}$. 47. $4R^2 \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\alpha}{2}\right) \operatorname{ctg} \dfrac{\alpha}{2}$.

48. $\dfrac{2\pi d^2}{\cos \alpha \cdot \sin^2 \dfrac{\alpha}{2}}$.

§ 6. Декартові координати та вектори

1. 1; 2; 3.

2. $A_{xy}(2; 3; 0)$, $A_{xz}(2; 0; 1)$, $A_{yz}(0; 3; 1)$.

3. $A_x(2; 0; 0)$, $A_y(0; 3; 0)$, $A_z(0; 0; 1)$.

4. $\sqrt{66}$. 5. (1,5; 1,5; 0,5). 6. (2; 3; 4). 7. $3 + 2\sqrt{2}$.

8. $\left(0; 0; \dfrac{11}{6}\right)$. 9. (0; –2; 0).

10. (0; 0; 5). 11. (6; 2; –2).

12. 13. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 25$.

14. 1) (0; 0; 0), $R = \sqrt{2}$;

2) (−2; 2; 0), $R = \sqrt{3}$;

3) (1; −1; 0), $R = 2$.

15. $(x-4)^2 + (y+4)^2 + (z-2)^2 = 36$. 16. (−13; 8; −5).

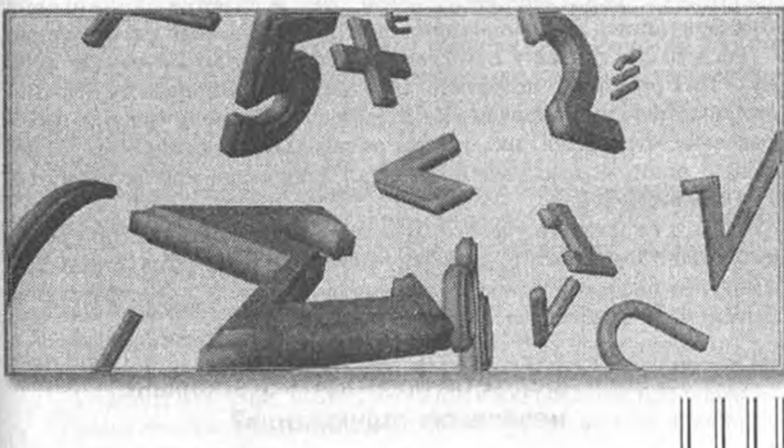
17. $m = 2$, $n = 9$. 18. −2. 19. 60°. 20. 4. 21. $\arccos\frac{1}{\sqrt{30}}$.

22. (5; 4; 3), $\arccos\left(-\frac{2\sqrt{17}}{17}\right)$. 23. $\arccos\left(-\frac{7\sqrt{3}}{27}\right)$. 24. 135°;

25. (−6; 15). 26. (−9; 3; −12). 27. Лежать.

28. а) $\frac{3}{\sqrt{29}}$; б) $\frac{2}{\sqrt{58}}$; в) $\frac{1}{\sqrt{87}}$; г) $\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{29}}$.

ЗОВНІШНЕ НЕЗАЛЕЖНЕ ОЦІНЮВАННЯ



ЗНО В ЗАПИТАННЯХ ТА ВІДПОВІДЯХ[1]

Як правильно зареєструватися для участі в зовнішньому незалежному оцінюванні?

Першого листопада розпочалася реєстрація бажаючих пройти зовнішнє незалежне оцінювання навчальних досягнень у 2008 році.

Зареєструватися для участі в зовнішньому тестуванні можуть і повинні лише ті, хто планує вступати до вищих навчальних закладів.

Майбутні випускники загальноосвітніх шкіл, гімназій, колегіумів, ліцеїв реєструються за місцем навчання; випускники професійно-технічних навчальних закладів — в обласних (міських) навчально-методичних центрах професійно-технічної освіти або в єдиних пунктах реєстрації. Також у єдиних пунктах реєстрації реєструються випускники вищих навчальних закладів I–II рівнів акредитації та ті, що закінчили загальноосвітні навчальні заклади в попередні роки. Інформацію про місцезнаходження єдиних пунктів реєстрації можна отримати у відділах (управліннях) освіти районних (міських) державних адміністрацій за місцем проживання або звернувшись до регіональних центрів оцінювання якості освіти.

Реєстрація триває з 1 листопада 2007 року до 20 лютого 2008 року. Для реєстрації необхідно мати паспорт громадянина України (або свідоцтво про народження й довідку із закладу освіти з фотографією). Громадяни, які отримали загальну середню освіту в попередні роки, повинні мати оригінал документа про загальну середню освіту.

Усім, хто братиме участь у зовнішньому тестуванні 2008 року, необхідно потурбуватися про наявність паспорта громадянина України. Без паспорта можуть виникнути проблеми з реєстрацією та допуском до тестування.

З яких предметів проводиться зовнішнє незалежне оцінювання?

Зовнішнє незалежне оцінювання проводиться у формі тестування з таких предметів: українська мова і література, математика, історія України, всесвітня історія, фізика, хімія, біологія, географія, зарубіжна література, основи правознавства, основи економіки.

---

[1] Дана інформація розміщена на сайті Українського центру оцінювання якості освіти: www.testportal.com.ua.

Кожен зареєстрований учасник може пройти тестування з трьох предметів: українська мова і література — обов'язково та одного чи двох предметів за вибором, які потрібні для вступу до вибраного вищого навчального закладу.

Особливістю кампанії зовнішнього незалежного оцінювання 2008 року є можливість проходження тестування усіма мовами, якими здійснюється навчальний процес у загальноосвітніх навчальних закладах. Виключенням є тест з української мови і літератури, який складається українською мовою.

Які документи необхідно мати при реєстрації?

- Паспорт (для осіб, яким на момент закінчення реєстрації не виповниться 16 років, — свідоцтво про народження).
- Документ про повну загальну середню освіту (для випускників загальноосвітніх навчальних закладів попередніх років).
- Довідку з місця навчання (для учнів професійно-технічних та студентів вищих навчальних закладів I–II рівнів акредитації).

Процедура проведення тестування

Якщо учень прийде до аудиторії (класу) після початку тестування, йому не дозволять взяти в ньому участь. На місце тестування його учасники мають прийти щонайменше за 30 хвилин до його початку.

Учень повинен мати при собі капілярну чи гелеву ручку з чорнилом або пастою насиченого чорного кольору. Учнів до аудиторії запрошує інструктор, який вказує кожному місце в ній. Учневі заборонено мінятися місцем з іншим учасником зовнішнього оцінювання.

Під час тестування його учасникам не можна:

- виходити з аудиторії;
- спілкуватися з іншими його учасниками;
- користуватися будь-якими матеріалами чи посібниками, а також папером, олівцями, книгами, маркерами, мобільними телефонами, будь-якими електронними та фотографічними засобами.

Якщо в учня виникла проблема, до нього підійде інструктор, щоб допомогти, але запитання, які стосуються змісту завдань, учні ставити не можуть. Особи, які супроводжують учнів, не можуть перебувати в приміщенні, де відбувається тестування.

Перевірити, чи зареєстровані ви для участі в тестуванні, можна після 20 листопада 2007 року на сайті Українського центру оцінювання якості освіти: www.testportal.com.ua.

МАТЕМАТИКА

Програма зовнішнього незалежного оцінювання 2008 року

ПЕРЕЛІК РОЗДІЛІВ І ТЕМ

І. Арифметика, алгебра і початки аналізу

1. Натуральні числа і нуль. Читання і запис натуральних чисел. Порівняння натуральних чисел. Дії над натуральними числами.
2. Подільність натуральних чисел. Дільники і кратні натурального числа. Парні і непарні числа. Ознаки подільності на **2, 3, 5, 9, 10**. Ділення з остачею. Прості і складені числа. Розкладання натурального числа на прості множники. Найбільший спільний дільник, найменше спільне кратне.
3. Звичайні дроби. Порівняння звичайних дробів. Правильний і неправильний дріб. Ціла та дробова частина числа. Основна властивість дробу. Скорочення дробу. Середнє арифметичне кількох чисел. Основні задачі на дроби.
4. Раціональні та ірраціональні числа, їх порівняння та дії над ними.
5. Відсотки. Основні задачі на відсотки.
6. Степінь з натуральним і раціональним показником. Арифметичний корінь та його властивості.
7. Логарифми та їх властивості. Основна логарифмічна тотожність.
8. Одночлен і многочлен. Дії над ними. Формули скороченого множення.
9. Многочлен з однією змінною. Корінь многочлена.
10. Поняття функції. Способи задання функції. Область визначення, область значень функції. Функція, обернена до даної.
11. Графік функції. Зростання і спадання функції; періодичність, парність, непарність функції.
12. Достатня умова зростання (спадання) функції на проміжку. Поняття екстремуму функції. Необхідна умова екстремуму. Найбільше і найменше значення функції на відрізку.
13. Означення і основні властивості функцій: лінійної, квадратичної, степеневої, показникової, логарифмічної, тригонометричної.

14. Рівняння. Розв'язування рівнянь, визначення розв'язків рівняння. Рівносильні рівняння. Графік рівняння з двома змінними.
15. Нерівності. Розв'язування нерівностей, визначення розв'язків нерівностей. Рівносильні нерівності.
16. Системи рівнянь та системи нерівностей. Розв'язування систем рівнянь та нерівностей, визначення розв'язків системи. Рівносильні системи рівнянь і нерівностей.
17. Числові послідовності. Арифметична і геометрична прогресії. Формула n-го члена прогресії та суми її n перших членів. Формула суми членів нескінченної геометричної прогресії із знаменником $|q| < 1$.
18. Залежність між тригонометричними функціями одного й того ж аргументу. Тригонометричні функції суми та різниці двох аргументів, половинного і подвійного аргументів. Формули зведення.
19. Означення похідної, її механічний та геометричний змісти.
20. Похідна. Таблиця похідних. Похідна суми, різниці, добутку, частки. Похідна складеної функції.
21. Первісна та визначений інтеграл. Таблиця первісних елементарних функцій. Правила знаходження первісних. Формула Ньютона – Лейбніца.
22. Перестановки (без повторень), кількість перестановок. Розміщення (без повторень), кількість розміщень. Комбінації (без повторень). Біном Ньютона.
23. Найпростіші випадки підрахунку ймовірностей випадкових подій.
24. Статистичні характеристики рядів даних.

II. Геометрія

1. Пряма, промінь, відрізок, ламана; довжина відрізка. Кут, величина кута. Вертикальні та суміжні кути. Паралельні прямі. Рівність і подібність геометричних фігур. Відношення площ подібних фігур.
2. Приклади перетворення геометричних фігур, види симетрії.
3. Декартові координати. Вектори. Операції над векторами.
4. Многокутник. Вершини, сторони, діагоналі многокутника.
5. Трикутник. Медіана, бісектриса, висота трикутника, їхні властивості. Види трикутників. Співвідношення між сторонами та кутами прямокутного трикутника.
6. Чотирикутник: паралелограм, прямокутник, ромб, квадрат, трапеція; їхні властивості.

7. Коло і круг. Центр, діаметр, радіус, хорда, січна кола. Залежність між відрізками у колі. Дотична до кола. Дуга кола. Сектор, сегмент.
8. Центральні і вписані кути, їхні властивості.
9. Формули площ геометричних фігур: трикутника, паралелограма, прямокутника, ромба, квадрата, трапеції.
10. Довжина кола і довжина дуги кола. Радіанна міра кута. Площа круга і площа сектора.
11. Площина. Паралельні площини і площини, що перетинаються.
12. Паралельність прямої і площини.
13. Кут між прямою і площиною. Перпендикуляр до площини.
14. Двогранні кути. Лінійний кут двогранного кута. Перпендикулярність двох площин.
15. Многогранники. Вершини, ребра, грані многогранника. Пряма і похила призми. Піраміда. Правильна призма і правильна піраміда. Паралелепіпеди, їх види.
16. Тіла обертання: циліндр, конус, сфера, куля. Центр, діаметр, радіус сфери і кулі. Площина, дотична до сфери.
17. Формули площі поверхонь і об'ємів призми, піраміди, циліндра, конуса.
18. Формули площі поверхні сфери, об'єму кулі.

ВИМОГИ ДО РІВНЯ ЗАГАЛЬНООСВІТНЬОЇ ПІДГОТОВКИ УЧАСНИКІВ ЗНО З МАТЕМАТИКИ

Учасники зовнішнього незалежного оцінювання повинні:

- **виконувати** математичні розрахунки (дії з числами, поданими в різних формах, дії з відсотками, складання та розв'язування пропорцій, наближені обчислення тощо);
- **виконувати** перетворення виразів, що містять степеневі, показникові, логарифмічні і тригонометричні функції (**розуміти** змістове значення кожного елемента виразу, **знаходити** допустимі значення змінних, числові значення виразів при заданих значеннях змінних, **виражати** з рівності двох виразів одну змінну через інші тощо);
- **будувати, читати й аналізувати** графіки функціональних залежностей, **досліджувати** їхні властивості;
- **розв'язувати** рівняння, нерівності та їх системи, текстові задачі складанням рівнянь, нерівностей та їх систем;

- **зображати** та **знаходити** на рисунках геометричні фігури, **встановлювати** їхні властивості й **виконувати** геометричні побудови;
- **знаходити** кількісні характеристики геометричних фігур (довжини, величини кутів, дуг, площі, об'єми);
- **обчислювати** ймовірності випадкових подій та **розв'язувати** найпростіші комбінаторні задачі;
- **виконувати** операції над векторами і **використовувати** їх при розв'язуванні практичних задач і вправ;
- **застосовувати** похідну при дослідженні функцій на зростання (спадання), на екстремум, а також для побудови графіків функцій;
- **аналізувати** інформацію, подану в різних формах (графічній, табличній, текстовій та ін.);
- **будувати** математичні моделі реальних об'єктів, процесів і явищ та **досліджувати** ці моделі засобами математики.

МАТЕМАТИКА

Тест містить 36 завдань. Орієнтовний розподіл завдань тесту за змістовими лініями (у %) наводимо в таблиці 1.

Таблиця 1

Навчальний предмет	Зміст	Орієнтовний розподіл завдань (у %)
Алгебра і початки аналізу	Числа і вирази	20–22
	Рівняння і нерівності	20–25
	Функції	25–30
	Елементи комбінаторики, початки теорії ймовірностей та елементи статистики	6–8
Геометрія	Планіметрія	6–8
	Стереометрія	12–15

На виконання тесту з математики відведено 180 хвилин.

ДЕМОНСТРАЦІЙНИЙ ВАРІАНТ ТЕСТОВОГО ЗОШИТА

Частина 1

Завдання 1–20 мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки ОДНА відповідь правильна. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь та позначте її у бланку відповідей.

1. Обчисліть $\log_8 16$.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$

2. На скільки відсотків збільшиться реальна зарплата, якщо ціни на всі продовольчі і промислові товари зменшити на 20 %?

А	Б	В	Г	Д
На 5 %	На 10 %	На 15 %	На 20 %	На 25 %

3. Із натуральних чисел від 1 до 20 учень навмання називає одне. Яка ймовірність того, що це число є дільником числа 20?

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$

4. Знайдіть область визначення функції $y = \frac{1}{\lg(3-x)}$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; 3)$	$(-\infty; 2)$	$(2; 3)$	$(-\infty; 2)\cup(2; 3)$	$x \neq 2$

5. Довжина кроку Чебурашки дорівнює 15 см, а крокодила Гени — 50 см. Яку найменшу однакову відстань має пройти кожний із них, щоб вони обидва зробили по цілому числу кроків?

А	Б	В	Г	Д
75 см	90 см	120 см	150 см	300 см

6. Обчисліть $\sin 990°$.

А	Б	В	Г	Д
0	$\frac{1}{2}$	1	–1	$-\frac{1}{2}$

7. Розв'яжіть рівняння $\sqrt[5]{2^{5x-2}}=\frac{32}{\sqrt{32}}$.

А	Б	В	Г	Д
2,9	3,6	–2,3	–5,2	0

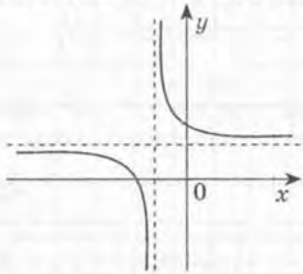
8. Укажіть, скільки дійсних коренів має рівняння $x^2-\lvert x\rvert=0$.

А	Б	В	Г	Д
жодного	три	два	один	більше трьох

9. Розв'яжіть рівняння $\operatorname{tg}2x=\sqrt{3}$.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n\in Z$	$\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in Z$	$\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in Z$	$\frac{\pi}{12}+\pi n$, $n\in Z$	$\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in Z$

10. За ескізом графіка функції $y=\dfrac{ax+b}{x+c}$ визначте знаки коефіцієнтів a, b, c. Оберіть правильне твердження.



А	Б	В	Г	Д
$\begin{cases} a>0, \\ b>0, \\ c>0 \end{cases}$	$\begin{cases} a>0, \\ b<0, \\ c<0 \end{cases}$	$\begin{cases} a<0, \\ b>0, \\ c<0 \end{cases}$	$\begin{cases} a<0, \\ b>0, \\ c>0 \end{cases}$	$\begin{cases} a<0, \\ b<0, \\ c>0 \end{cases}$

11. Розташуйте в порядку спадання числа: $\cos 0,3$; $\cos 0,6$; $\cos 0,9$.

А	Б	В	Г	Д
$\cos 0,3$; $\cos 0,9$; $\cos 0,6$	$\cos 0,6$; $\cos 0,3$; $\cos 0,9$	$\cos 0,3$; $\cos 0,6$; $\cos 0,9$	$\cos 0,6$; $\cos 0,9$; $\cos 0,3$	$\cos 0,9$; $\cos 0,6$; $\cos 0,3$

12. Серед наведених функцій укажіть непарну функцію.

А	Б	В	Г	Д
$y=x-1$	$y=x^3$	$y=x^2$	$y=\cos x$	$y=\sqrt{x}$

13. Розв'яжіть нерівність $\dfrac{3}{x+1}\le 5$.

А	Б	В	Г	Д
$(-1;\ -0,4]$	$(-\infty;-1]\cup(-0,4;+\infty)$	$[-1;\ -0,4]$	$(-\infty;-1)\cup[-0,4;+\infty)$	$(-\infty;+\infty)$

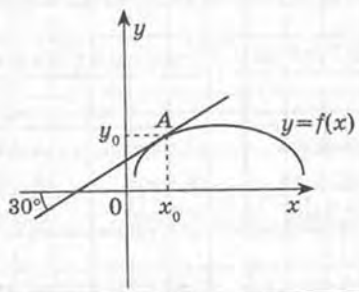
14. Розв'яжіть нерівність $\log_4(3x-1)<\log_4(2x+3)$.

А	Б	В	Г	Д
$\left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$	$(-\infty; 4)$	$\left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$	$(4; +\infty)$	$\left(\frac{1}{3}; 4\right)$

15. Знайдіть первісну функції $f(x)=4x^3-2x-3$, графік якої проходить через точку $A(-1; -3)$.

А	Б	В	Г	Д
x^4-x^2-3x-6	x^4-x^2-3x-3	x^4-x^2-3x	x^4-x^2-3x+3	x^4-x^2-3x+6

16. На рисунку зображено графік функції $y=f(x)$ та дотичну до нього в точці A. Знайдіть $f'(x_0)$.



А	Б	В	Г	Д
x_0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	y_0	$\sqrt{3}$

17. Кут при основі AB рівнобедреного трикутника ABC дорівнює $50°$. Висоти трикутника проведені до бічних сторін та перетинаються в точці O. Знайдіть $\angle AOB$.

А	Б	В	Г	Д
60°	80°	90°	100°	120°

18. Сторона ромба дорівнює 17 см, а одна з його діагоналей — 30 см. Знайдіть довжину другої діагоналі.

А	Б	В	Г	Д
14 см	15 см	16 см	17 см	18 см

19. Знайдіть медіану BM трикутника ABC, вершини якого мають координати: $A(4;\ -2)$, $B(-2;\ -2)$, $C(-2;\ 6)$.

А	Б	В	Г	Д
1	2	3	4	5

20. Твірна конуса дорівнює 5 см, висота — 4 см. Знайдіть площу його поверхні.

А	Б	В	Г	Д
16π см^2	20π см^2	21π см^2	24π см^2	40π см^2

Частина 2

Розв'яжіть завдання 21–35. Запишіть відповідь у зошит і перенесіть її до бланку відповідей.

21. Спростіть вираз $\dfrac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}}:\dfrac{1}{x^2-\sqrt{x}}$ та знайдіть його значення, якщо $x=5$.

Відповідь: ____________________

22. Знайдіть значення виразу $\log_{\sqrt{5}} 2+\log_5 6,25$.

Відповідь: ____________________

23. Обчисліть $\sqrt{7+4\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}$.

Відповідь: ____________________

24. Спростіть вираз $\frac{\sin 9\alpha}{\sin 3\alpha} - \frac{\cos 9\alpha}{\cos 3\alpha}$, якщо $\alpha \neq \frac{\pi n}{6}$, $n \in Z$.

Відповідь: ____________________

25. Знайдіть перший член геометричної прогресії, яка складається із шести членів, якщо сума трьох її членів із непарними номерами дорівнює 546, а сума трьох інших членів дорівнює 182.

Відповідь: ____________________

26. Укажіть найбільше ціле число, яке є розв'язком нерівності $\frac{(x-1)^3(x+2)^4(x-5)}{(2x+1)(x-4)^2} < 0$.

Відповідь: ____________________

27. Знайдіть найменше ціле значення параметра a, при якому система рівнянь $\begin{cases} x^2 + y^2 = 16, \\ (x-a)^2 + y^2 = 1 \end{cases}$ має єдиний розв'язок.

Відповідь: ____________________

28. Катер пропливає 4 км проти течії річки і 15 км за течією за такий самий час, який потрібен плоту, щоб проплисти 2 км по цій річці. Знайдіть швидкість (у км/год) течії, якщо власна швидкість катера дорівнює 18 км/год.

Відповідь: ____________________

29. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} = \sqrt{3x-1}$.

Відповідь: ____________________

30. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} \lg x - \lg y = 1, \\ \lg x + \lg y = 3. \end{cases}$ Запишіть у відповідь добуток $x_0 : y_0$, де пара $(x_0; y_0)$ є розв'язком даної системи.

Відповідь: ____________________

31. Знайдіть найменше значення функції $y = x + e^{-x}$ на відрізку $[-1; 2]$.

Відповідь: ____________________

32. Знайдіть найбільше ціле значення параметра a, при якому рівняння $4^x-(a+3)\cdot 2^x+4a-4=0$ має тільки один корінь.

Відповідь: ______________________

33. Діагоналі паралелограма дорівнюють 32 см і 10 см, а кут між ними дорівнює 120°. Знайдіть більшу сторону паралелограма (у см).

Відповідь: ______________________

34. Дано вершини A, B, C трикутника ABC: $A(-1;\,-2;4)$, $B(-4;\,-2;0)$, $C(3;\,-2;1)$. Знайдіть його внутрішній кут (у градусах) при вершині B.

Відповідь: ______________________

35. Сторона основи правильної трикутної піраміди дорівнює 3 см, а бічне ребро утворює з площиною основи кут 45°. Знайдіть об'єм піраміди (у см^3).

Відповідь: ______________________

Частина 3

Розв'язання завдань 36–38 повинно мати обґрунтування. Запишіть послідовні логічні дії та пояснення, зробіть посилання на математичні факти, із яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання завдань схемами, графіками, таблицями.

УВАГА! ***Розв'язання завдань 36–38 запишіть у бланку Б.***

36. Довжина ребра куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дорівнює a. Знайдіть площу перерізу, проведеного через діагональ AD_1 грані AA_1D_1D і середину M ребра BB_1.

37. Розв'яжіть рівняння $\log_a x^2+2\log_a(x+2)=1$, якщо $a>0$, $a\neq 1$.

38. Побудуйте графік функції $y=10^{|\lg|x||}$.

А

Бланк відповідей до зошита з **математики**

Увага! Відмічайте тільки один варіант відповіді. Дотримуйтесь правил запису відповідей. У завданнях 21–35 записуйте по одній цифрі в кожному прямокутнику, враховуючи положення коми. Знак «мінус» записуйте в окремому прямокутнику ліворуч від цифри; якщо число додатне, знак «плюс» не записуйте.

Наприклад: правильний запис числа 2: □□2,□□□ або: □□2,0□□

правильний запис числа 2,8: □□2,8□□

правильний запис числа –2,008: □–2,008

Якщо Ви позначили неправильну відповідь, правильну можна записати в спеціально відведеному місці, розташованому внизу бланка А.

У завданнях 1–20 правильну відповідь позначайте тільки так: ☒.

	1	2	3	4		5	6	7	8		9	10	11	12		13	14	15	16		17	18	19	20
А	□	□	□	□	А	□	□	□	□	А	□	□	□	□	А	□	□	□	□	А	□	□	□	□
Б	□	□	□	□	Б	□	□	□	□	Б	□	□	□	□	Б	□	□	□	□	Б	□	□	□	□
В	□	□	□	□	В	□	□	□	□	В	□	□	□	□	В	□	□	□	□	В	□	□	□	□
Г	□	□	□	□	Г	□	□	□	□	Г	□	□	□	□	Г	□	□	□	□	Г	□	□	□	□
Д	□	□	□	□	Д	□	□	□	□	Д	□	□	□	□	Д	□	□	□	□	Д	□	□	□	□

У завданнях 21–35 правильну відповідь записуйте тільки десятковим дробом.

21	□□□,□□□	22	□□□,□□□	23	□□□,□□□
24	□□□,□□□	25	□□□,□□□	26	□□□,□□□
27	□□□,□□□	28	□□□,□□□	29	□□□,□□□
30	□□□,□□□	31	□□□,□□□	32	□□□,□□□
33	□□□,□□□	34	□□□,□□□	35	□□□,□□□

Щоб виправити відповідь до завдання, запишіть номер завдання і правильну відповідь.

Завдання 1–20

Номер завдання	А	Б	В	Г	Д
□□	□	□	□	□	□
□□	□	□	□	□	□
□□	□	□	□	□	□

Завдання 21–35

Номер завдання	
□□	□□□,□□□
□□	□□□,□□□
□□	□□□,□□□

Бланк відповідей до зошита з **математики**

Б

Увага! Пишіть розв'язання завдань та відповідь у кожному рядку!

Завдання 36

Розв'язання

Рисунок

Відповідь:

Завдання 37

Розв'язання

Відповідь:

Завдання 38

Розв'язання

Відповідь:

КОМЕНТАР ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ ТЕСТОВИХ ЗАВДАНЬ

Частина 1

1. $\log_8 16 = \log_{2^3} 2^4 = \frac{4}{3}\log_2 2 = \frac{4}{3}\cdot 1 = \frac{4}{3}$.

   Відповідь: Б.

2. Нехай x — початкова ціна товарів, тоді $\frac{1}{x}$ — реальна заробітна платня. $0{,}8x$ — нова ціна товарів, тоді $\frac{1}{0{,}8x} = \frac{5}{4x}$ — реальна заробітна платня. Отже, реальна заробітна платня збільшилася на $100\,\% : \frac{1}{x}\left(\frac{5}{4x} - \frac{1}{x}\right) = \frac{100\,\% \cdot x}{4x} = 25\,\%$.

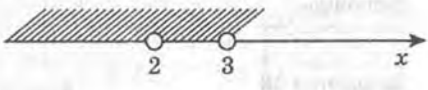
   Відповідь: Д.

3. Серед перших двадцяти натуральних чисел дільниками числа 20 є числа 1; 2; 4; 5; 10; 20. Отже, шукана ймовірність дорівнює $\frac{6}{20} = \frac{3}{10}$.

   Відповідь: В.

4. Враховуючи, що логарифми існують тільки з додатних чисел і $\lg(3-x) \neq 0$, маємо:

   $$\begin{cases} 3-x>0, \\ \lg(3-x)\neq 0; \end{cases}$$

   тоді $\begin{cases} x<3, \\ 3-x\neq 1; \end{cases}$ $\begin{cases} x<3, \\ x\neq 2. \end{cases}$ Звідси $x\in(-\infty; 2)\cup(2; 3)$.

   Відповідь: Г.

5. Щоб знайти найменшу однакову відстань, яку мають пройти Чебурашка і крокодил Гена, щоб обидва зробили по цілому числу кроків, треба знайти найменше спільне кратне чисел 15 і 50. НСК (15; 50) = 150.

   Відповідь: Г.

6. $\sin 990° = \sin(720° + 270°) = \sin 270° = -1.$

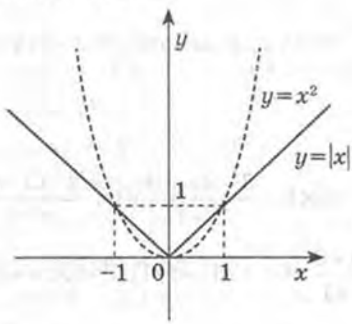
Відповідь: Г.

7. $\sqrt[5]{2^{5x-2}} = \frac{32}{\sqrt{32}}$; $2^{\frac{5x-2}{5}} = \frac{2^5}{2^{\frac{5}{2}}}$; $2^{\frac{5x-2}{5}} = 2^{5-\frac{5}{2}}$; $\frac{5x-2}{5} = 5 - \frac{5}{2}$; $\frac{5x-2}{5} = \frac{5}{2}$;

$10x - 4 = 25$; $10x = 29$; $x = 2{,}9$.

Відповідь: А.

8. Оскільки $x^2 - |x| = 0$, то $|x| = x^2$. Побудувавши графіки функцій $y = x^2$ і $y = |x|$ в одній системі координат, бачимо, що рівняння має три корені: -1; 0; 1.



Відповідь: Б.

9. $\operatorname{tg} 2x = \sqrt{3}$; $2x = \operatorname{arctg}\sqrt{3} + \pi n,\ n \in Z$; $2x = \frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in Z$;

$x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2},\ n \in Z.$

Відповідь: В.

10. Якщо $x = -c$, то функція не визначена, отже, $-c < 0$, тоді $c > 0$.

Якщо $x = 0$, то $y = \frac{b}{c}$, тоді $\frac{b}{c} > 0$. Оскільки $c > 0$, то $b > 0$.

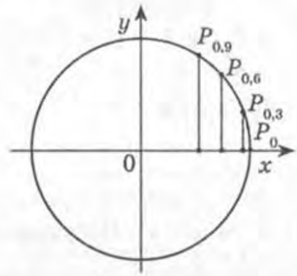
Якщо $y = 0$, то $ax + b = 0$, $x = -\frac{b}{a}$, тоді $-\frac{b}{a} < 0$, звідси $\frac{b}{a} > 0$.

Оскільки $b > 0$, то і $a > 0$.

Отже, $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$.

Відповідь: А.

11. Нанесемо на одиничне коло точки $P_{0,3}$, $P_{0,6}$, $P_{0,9}$, тоді маємо: $\cos 0,3 > \cos 0,6 > \cos 0,9$.



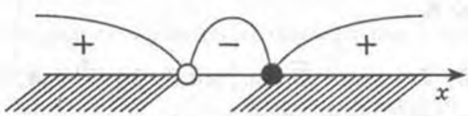
Відповідь: В.

12. Оскільки $(-x)^3 = -x^3$ для всіх $x \in (-\infty; +\infty)$, то функція $y = x^3$ — непарна.

Відповідь: Б.

13. $\frac{3}{x+1} \le 5$; $\frac{3}{x+1} - 5 \le 0$; $\frac{3-5(x+1)}{x+1} \le 0$; $\frac{3-5x-5}{x+1} \le 0$;

$\frac{-2-5x}{x+1} \le 0$; $\frac{5x+2}{x+1} \ge 0$; $x \in (-\infty; -1) \cup [-0,4; +\infty)$.



Відповідь: Г.

14. $\log_4(3x-1) < \log_4(2x+3)$; $\begin{cases} 3x-1 < 2x+3, \\ 3x-1 > 0, \\ 2x+3 > 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x < 4, \\ 3x > 1, \\ 2x > -3; \end{cases}$ $\begin{cases} x < 4, \\ x > \frac{1}{3}, \\ x > -\frac{3}{2}; \end{cases}$

$\begin{cases} x < 4, \\ x > \frac{1}{3}; \end{cases}$ $x \in \left(\frac{1}{3}; 4\right)$.

Відповідь: Д.

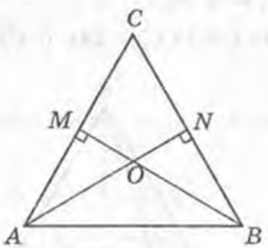
15. Будь-яка первісна для заданої функції має вигляд

$$F(x)=x^4-x^2-3x+C,$$

де C — довільна стала. Оскільки точка $A(-1;-3)$ належить графіку первісної, то виконується рівність $-3=1-1+3+C$, звідки $C=-6$. Отже, $F(x)=x^4-x^2-3x-6$ — шукана первісна.
Відповідь: А.

16. Оскільки значення похідної функції $y=f(x)$ у точці x_0 дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної до графіка функції в точці x_0: $f'(x_0)=k=\text{tg}\,\alpha$, де α — кут між дотичною і додатним напрямом осі OX, то $f'(x_0)=\text{tg}\,30°=\frac{1}{\sqrt{3}}$.
Відповідь: Б.

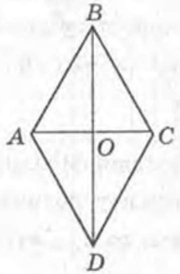
17. $AN\perp BC$, $BM\perp AC$, $AC=BC$, $\angle CAB=\angle CBA=50°$.
З трикутника ABM маємо:
$\angle ABM=90°-\angle MAB=90°-50°=40°$.
Із трикутника ABN маємо:
$\angle BAN=90°-\angle NBA=90°-50°=40°$.
Із трикутника AOB одержуємо:
$\angle AOB=180°-\angle ABM-\angle BAN=180°-40°-40°=100°$.



Відповідь: Г.

18. Нехай у ромбі $ABCD$ $AB=BC=CD=AD=17$ см, $BD=30$ см. Оскільки діагоналі ромба взаємно перпендикулярні і точкою O діляться навпіл, то $OB=\frac{1}{2}BD=\frac{1}{2}\cdot 30=15$ (см). Із трикутника BOC за теоремою Піфагора маємо:

$OC=\sqrt{BC^2-BO^2}=\sqrt{17^2-15^2}=8$ (см). Оскільки $OC=8$ см, то $AC=2\cdot OC=16$ (см).



Відповідь: В.

19. Знайдемо координати точки M:

$x_M=\dfrac{x_A+x_C}{2}=\dfrac{4-2}{2}=1,\ y_M=\dfrac{y_A+y_C}{2}=\dfrac{-2+6}{2}=2.$

Тоді $BM=\sqrt{(1+2)^2+(2+2)^2}=\sqrt{25}=5.$

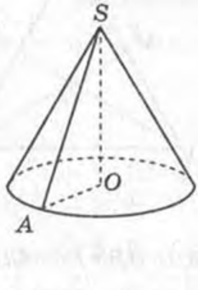
Відповідь: Д.

20. Нехай $SA=5$ см, $SO=4$ см.

Із трикутника ASO маємо: $AO=\sqrt{AS^2-SO^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3$ (см).

Оскільки $R=3$ см, $l=5$ см,

то $S_{\text{кон.}}=\pi R(R+l)=\pi\cdot 3\cdot(3+5)=24\pi$ (см²).



Відповідь: Г.

Частина 2

21. $$\frac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}}:\frac{1}{x^2-\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}\left(x+\sqrt{x}+1\right)}\cdot\frac{x^2-\sqrt{x}}{1}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)\cdot\left(x^2-\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+\sqrt{x}+1\right)}=\frac{(x-1)\left(x^2-\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}\left(x\sqrt{x}-1\right)}=\frac{(x-1)\left(x^2-\sqrt{x}\right)}{x^2-\sqrt{x}}=x-1.$$

Якщо $x = 5$, тоді $x-1=5-1=4$.

Відповідь: 4.

22. $$\log_{\sqrt{5}}2+\log_5 6{,}25=\log_{5^{\frac{1}{2}}}2+\log_5 6{,}25=2\log_5 2+\log_5 6{,}25=$$

$$=\log_5 2^2+\log_5 6{,}25=\log_5(4\cdot 6{,}25)=\log_2 25=2.$$

Відповідь: 2.

23. $$\sqrt{7+4\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+2\cdot 2\sqrt{3}+2^2}+\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2-2\cdot 2\cdot\sqrt{3}+2^2}=$$

$$=\sqrt{\left(\sqrt{3}+2\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{3}-2\right)^2}=\left|\sqrt{3}+2\right|+\left|\sqrt{3}-2\right|=\sqrt{3}+2+2-\sqrt{3}=4.$$

Відповідь: 4.

24. $$\frac{\sin 9\alpha}{\sin 3\alpha}-\frac{\cos 9\alpha}{\cos 3\alpha}=\frac{\sin 9\alpha\cos 3\alpha-\sin 3\alpha\cos 9\alpha}{\sin 3\alpha\cos 3\alpha}=$$

$$=\frac{2\sin(9\alpha-3\alpha)}{2\sin 3\alpha\cos 3\alpha}=\frac{2\sin 6\alpha}{\sin 6\alpha}=2.$$

Відповідь: 2.

25. Нехай b_1 — перший член геометричної прогресії b_n, q — її знаменник.

За умовою задачі $\begin{cases} b_1+b_3+b_5=546, \\ b_2+b_4+b_6=182. \end{cases}$

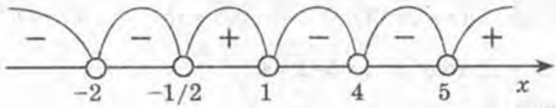
Поділивши почленно перше рівняння на друге, отримуємо:

$$\frac{b_1+b_3+b_5}{b_2+b_4+b_6}=\frac{546}{182};\quad \frac{b_1+b_1q^2+b_1q^4}{b_1q+b_1q^3+b_1q^5}=3;\quad \frac{b_1\left(1+q^2+q^4\right)}{b_1q\left(1+q^2+q^4\right)}=3;$$

$q=\frac{1}{3}$. Тоді $b_1+\frac{1}{9}b_1+\frac{1}{81}b_1=546$; $\frac{91}{81}b_1=546$; $b_1=486$.

Відповідь: 486.

26. Для розв'язування цієї нерівності застосуємо метод інтервалів. Зображаємо числа -2; $-\frac{1}{2}$; 1; 4; 5 на координатній прямій і визначаємо знак виразу $\frac{(x-1)^3(x+2)^2(x-5)}{(2x+1)(x-4)^2}$ на кожному з інтервалів.

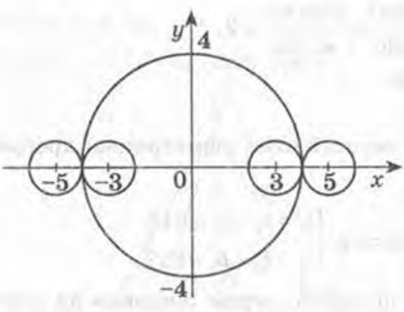


Отже, $x \in (-\infty; -2) \cup \left(-2; -\frac{1}{2}\right) \cup (1; 4) \cup (4; 5)$.

Найбільшим цілим розв'язком даної нерівності є число 3.

Відповідь: 3.

27. Перше рівняння задає коло радіусом 4 із центром у початку координат; друге рівняння — коло радіусом 1 із центром у точці $(a; 0)$. Щоб система рівнянь мала єдиний розв'язок необхідно, щоб ці два кола дотикалися (тобто мали єдину спільну точку). Із рисунка видно, що a може набувати значень -5; -3; 3; 5, а найменше значення a дорівнює -5.



Відповідь: -5.

28. Нехай швидкість течії x км/год, тоді маємо рівняння

$\frac{4}{18-x} + \frac{15}{18+x} = \frac{2}{x}$. Тоді $\frac{72x + 4x^2 + 270x - 15x^2 - 648 + 2x^2}{x(18+x)(18-x)} = 0$;

$$\begin{cases} x^2 - 38x + 72 = 0, \\ x(18+x)(18-x) \neq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2 \text{ або } x = 36, \\ x \neq 0, x \neq 18, x \neq -18. \end{cases}$$

Враховуючи, що $0 < x < 18$, $x = 2$.

Отже, швидкість течії — 2 км/год.

Відповідь: 2.

29. $\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} = \sqrt{3x-1}$; $\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}\right)^2 = \left(\sqrt{3x-1}\right)^2$;

$x + 1 + 2\sqrt{x^2-1} + x - 1 = 3x - 1$;

$2\sqrt{x^2-1} = x - 1$; $\left(2\sqrt{x^2-1}\right)^2 = (x-1)^2$; $4x^2 - 4 = x^2 - 2x + 1$;

$3x^2 + 2x - 5 = 0$; $x_1 = -1\frac{2}{3}$, $x_2 = 1$.

Перевіркою встановлюємо, що $x = -1\frac{2}{3}$ — сторонній корінь. Отже, $x = 1$.

Відповідь: 1.

30. Додамо і віднімемо почленно рівняння системи, тоді одержимо:

$$\begin{cases} 2\lg x = 4, \\ 2\lg y = 2; \end{cases} \begin{cases} \lg x = 2, \\ \lg y = 1; \end{cases} \begin{cases} x = 10^2, \\ y = 10^1. \end{cases} \quad x_0 : y_0 = 10^2 : 10 = 10^1 = 10.$$

Відповідь: 10.

31. Знайдемо $y'(x)$: $y' = \left(x + e^{-x}\right)' = 1 - e^{-x}$. Знайдемо стаціонарні точки: $1 - e^{-x} = 0$; $e^{-x} = 1$; $x = 0$.

$y(0) = 0 + e^0 = 1$, $y(-1) = -1 + e^1 = e - 1$, $y(2) = 2 - e^{-2} = 2 - \frac{1}{e^2}$.

Із чисел $e - 1$, $2 - \frac{1}{e^2}$ та 1 найменшим є 1.

Відповідь: 1.

32. Позначимо $2^x = y > 0$.

Тоді $\begin{cases} y^2 - (a+3)y + 4(a-1) = 0, \\ y > 0, \end{cases}$ звідси $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} y = 4, \\ y = a - 1, \end{array}\right. \\ y > 0. \end{cases}$

Рівняння має один дійсний корінь, якщо $a - 1 \leq 0$ або $a - 1 = 4$, тобто при $\left[\begin{array}{l} a \leq 1, \\ a = 5. \end{array}\right.$

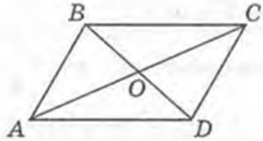
Отже, $a \in (-\infty; 1] \cup \{5\}$. Отже, найбільше значення a, при якому дане рівняння має один дійсний корінь, дорівнює 5.

Відповідь: 5.

33. Нехай у паралелограмі $ABCD$ $AC = 32$ см, $BD = 10$ см, O — точка перетину діагоналей, $\angle BOC = 120°$. Оскільки діагоналі паралелограма точкою перетину діляться навпіл, то $BO = 5$ см, $OC = 16$ см. Тоді із трикутника BOC за теоремою косинусів маємо:

$$BC^2 = OC^2 + OB^2 - 2 \cdot OC \cdot OB \cdot \cos 120° = 5^2 + 16^2 - 2 \cdot 5 \cdot 16 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 361.$$

Звідси $BC = 19$ см.



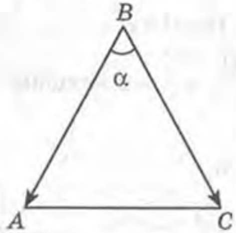
Відповідь: 19.

34. Позначимо $\angle ABC = \alpha$, тоді $\cos\alpha = \dfrac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}|}$.

$\overrightarrow{BA} = (3; 0; 4)$, $\overrightarrow{BC}(7; 0; 1)$.

$|\overrightarrow{BA}| = \sqrt{3^2 + 0^2 + 4^2} = 5$, $|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{7^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$;

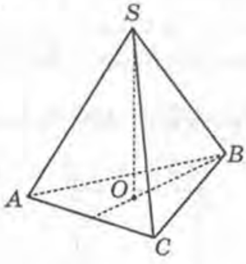
$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 3 \cdot 7 + 0 \cdot 0 + 4 \cdot 1 = 25.$



Звідси $\cos\alpha = \dfrac{25}{5 \cdot 5\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, тоді $\alpha = \arccos\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 45°$.

Відповідь: 45.

35. Нехай $SABC$ — правильна піраміда, у якій $AB=BC=AC=3$ см, $SO\perp(ABC)$, $\angle SBO=45°$. $S_{осн}=\frac{AB^2\sqrt{3}}{4}=\frac{9\sqrt{3}}{4}$.
OB — радіус кола, описаного навколо трикутника ABC, тому $OB=\frac{AB}{\sqrt{3}}=\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$ (см).



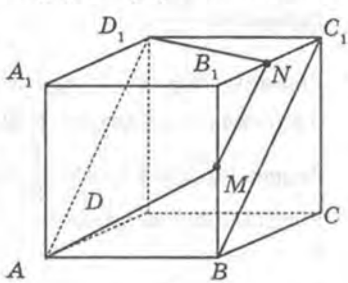
Із трикутника SOB маємо: $SO=OB=\sqrt{3}$ (см).

Тоді $V=\frac{1}{3}S_{осн}\cdot SO=\frac{1}{3}\frac{9\sqrt{3}}{4}\cdot\sqrt{3}=\frac{9}{4}=2,25$ (см^3).

Відповідь: 6,75.

Частина 3

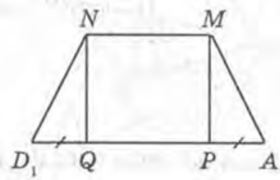
36. Відрізки AD_1 і AM належать площині перерізу і граням куба, тому вони є сторонами перерізу. Побудуємо сторону перерізу в грані BB_1C_1C. Площини BB_1C_1 і AA_1D_1 паралельні, тому пряма перетину площини перерізу і площини BB_1C_1 паралельна прямій AD_1. Оскільки прямі BC_1 і AD_1 паралельні, то пряма перетину паралельна і прямій BC_1. Проводимо через точку M у площині BB_1C_1 пряму, паралельну прямій BC_1,



яка перетинає ребро B_1C_1 і дає вершину N перерізу. Отже, $AMND_1$ — шуканий переріз — трапеція $(MN\parallel AD_1)$.

Знайдемо довжини сторін трапеції.

Маємо: $AD_1 = a\sqrt{2}$, відрізок MN — середня лінія трикутника BB_1C_1, тому $MN = \frac{1}{2}BC_1 = \frac{a}{\sqrt{2}}$. У трикутниках ABM і D_1C_1N $(AB = C_1D_1 = a)$ знаходимо $AM = D_1N = \frac{a\sqrt{5}}{2}$. Отже, трапеція $AMND_1$ — рівнобічна. Знайдемо її висоту. Опускаємо перпендикуляри MP і NQ на основу AD_1, одержуємо: $PQ = MN = \frac{a}{\sqrt{2}}$,



$D_1Q = PA = \frac{D_1A - QP}{2} = \frac{a}{2\sqrt{2}}$.

У прямокутному трикутнику D_1QN $\left(D_1N = \frac{a\sqrt{5}}{2}, D_1Q = \frac{a}{2\sqrt{2}}\right)$ знаходимо $NQ = \frac{3a}{2\sqrt{2}}$.

Визначаємо площу перерізу:

$S = \frac{1}{2}(MN + D_1A)\cdot NQ = \frac{9a^2}{8}$.

Відповідь: $\frac{9a^2}{8}$.

37. Рівняння $\log_a x^2 + 2\log_a(x+2) = 1$ на множині $(-2;0)\cup(0;+\infty)$ рівносильне рівнянню $2\log_a|x| + 2\log_a(x+2) = 1$.

Звідси $\log_a(|x|\cdot(x+2)) = \frac{1}{2}$, тоді $|x|(x+2) = \sqrt{a}$.

Розглянемо два випадки:

1) $-2 < x < 0$.

Рівняння набуває вигляду $-x(x+2) = \sqrt{a}$, тобто $x^2 + 2x + \sqrt{a} = 0$,

тоді $\begin{cases} x = -1 \pm \sqrt{1-\sqrt{a}}, \\ -2 < x < 0. \end{cases}$

Якщо $0<a<1$, то обидва значення $x=-1\pm\sqrt{1-\sqrt{a}}$ задовольняють умові $-2<x<0$, тобто в цьому випадку є розв'язками рівняння. Якщо $a>1$, то розв'язків немає.

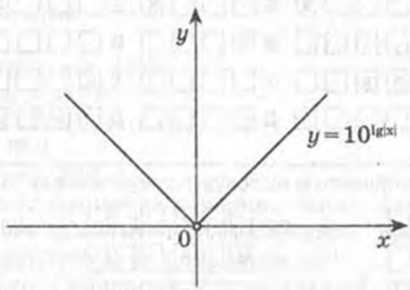
2) $x>0$.

У цьому випадку рівняння рівносильне такому $x(x+2)=\sqrt{a}$ або $x^2+2x-\sqrt{a}=0$, тоді $\begin{cases} x=-1\pm\sqrt{1+\sqrt{a}}, \\ x>0. \end{cases}$

Звідси $x=\sqrt{1+\sqrt{a}}-1$, якщо $a\in(0;1)\cup(1;+\infty)$.

Відповідь: $x=-1\pm\sqrt{1-\sqrt{a}}$, $x=\sqrt{1+\sqrt{a}}-1$, якщо $a\in(0;1)$; $x=\sqrt{1+\sqrt{a}}-1$, якщо $a\in(1;+\infty)$.

38. $y=10^{\lg|x|}$, тоді $y=\begin{cases} |x|, \text{ якщо } x\neq 0, \\ \text{не визначене, якщо } x=0. \end{cases}$



А Зразок заповнення бланку відповідей до зошита з **математики**

Увага! Відмічайте тільки один варіант відповіді. Дотримуйтесь правил запису відповідей. У завданнях 21–35 записуйте по одній цифрі в кожному прямокутнику, враховуючи положення коми. Знак «мінус» записуйте в окремому прямокутнику ліворуч від цифри; якщо число додатне, знак «плюс» не записуйте.

Наприклад: правильний запис числа 2: | | |2|,| | | | або: | | |2|,|0| | |

правильний запис числа 2,8: | | |2|,|8| | |

правильний запис числа –2,008: | |–|2|,|0|0|8|

Якщо Ви позначили неправильну відповідь, правильну можна записати в спеціально відведеному місці, розташованому внизу бланка А.

У завданнях 1–20 правильну відповідь позначайте тільки так: ☒.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
А	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐
Б	☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐
В	☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐
Г	☐	☐	☐	☒	☒	☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐	☒	☐	☐	☒
Д	☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐	☒	☐

У завданнях 21–35 правильну відповідь записуйте тільки десятковим дробом.

21	4,	22	2,	23	4,
24	2,	25	486,	26	3,
27	–5,	28	2,	29	1,
30	10,	31	1,	32	5,
33	19,	34	45,	35	2,25

Щоб виправити відповідь до завдання, запишіть номер завдання і правильну відповідь.

Завдання 1–20

Номер завдання	А	Б	В	Г	Д
☐☐	☐	☐	☐	☐	☐
☐☐	☐	☐	☐	☐	☐
☐☐	☐	☐	☐	☐	☐

Завдання 21–35

Номер завдання	
☐☐	☐☐☐,☐☐☐
☐☐	☐☐☐,☐☐☐
☐☐	☐☐☐,☐☐☐

АЛФАВІТНИЙ ПОКАЖЧИК

ЛІТЕРАТУРА

1. Програма для загальноосвітніх навчальних закладів. Математика 5–12 класи. — Київ, Ірпінь, 2005.
2. Нелін Є., Дворецька Л., Прокопенко Н. та ін. Зовнішнє оцінювання з математики. Інформаційні матеріали, — К.: УЦОЯО, 2006.
3. Математика: Зовніш. оцінювання. Навч. посіб. із підготов. до зовніш. оцінювання учнів загальноосвіт. навч. закл. / Л. П. Дворецька, Ю. О. Захарійченко, А. Г. Мерзляк та ін.; Укр. центр оцінювання якості освіти. — К., 2007.
4. Забєлишинська М. Я. Зовнішнє оцінювання (підготовка). Математика. 5–11 класи: Довідник. — Х.: Веста: Видавництво «Ранок», 2007.
5. Гальперіна А. Р. Зовнішнє оцінювання (підготовка). Математика: Тренувальні завдання. — Харків: Веста: Видавництво «Ранок», 2007.
6. Будна О. С. Зовнішнє оцінювання (підготовка). Математика. Репетитор. Х.: Веста: Видавництво «Ранок», 2007.
7. Збірник тренувальних завдань із математики для підготовки до зовнішнього незалежного оцінювання / О. Ю. Максименко, О. О. Тарасенко та ін. — Харків: Торсінг плюс, 2007.
8. Роганін О. М. Зовнішнє оцінювання. Математика. Зошит для підготовки. — Х.: Фактор, 2007.
9. Роганін О. М. Збірник тренувальних вправ із математики. — Харків: Весна, 2008.
10. Шкіль М. І. та ін. Алгебра і початки аналізу: Підруч. для 10–11 кл. загальноосвіт. навч. закладів / М. І. Шкіль, З. І. Слєпкань, О. С. Дубинчук. — Зодіак. — ЕКО, 2001.
11. Нелін Є. П. Алгебра і початки аналізу: Дворівневий підруч. для 10 кл. загальноосвіт. навч. закладів. — Х.: Світ дитинства, 2006.
12. Нелін Є. П., Долгова О. Є. Алгебра і початки аналізу: Дворівневий підруч. для 11 кл. загальноосвіт. навч. закладів. — Х.: Світ дитинства, 2005.
13. Кравчук Василь. Алгебра і початки аналізу. Пробний підручник для 10 класу. — Тернопіль: Підручники і посібники, 2005.
14. Алгебра и начала анализа: Учебн. для 10–11 кл. сред. шк. / А. Н. Колмогоров, А. М. Абрамов, Ю. П. Дудницин и др.; Под ред. А. Е. Колмогорова. — М.: Просвещение, 1990.
15. Погорєлов О. В. Геометрія: Стереометрія; Підруч. для 10–11 кл. серед. шк. — К.: Освіта, 2001.

16. Бевз Г. П. та інші. Геометрія: Підруч. для 10–11 кл. загальноосвітн. навч. закладів / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз, Н. Г. Владімірова. — К.: Вежа, 2002.
17. Збірник завдань для державної підсумкової атестації з математики. Алгебра і початки аналізу. 11 клас. За редакцією З. І. Слєпкань. — Харків: «Гімназія», 2002.
18. Збірник завдань для державної підсумкової атестації з математики. Геометрія. 11 клас / За ред. З. І. Слєпкань. — Харків: «Гімназія», 2002.
19. Кравчук В. Р., Підручна М. В., Тадеєв В. Р., Янченко Г. М. Довідник зі змісту, типів та методів розв'язування екзаменаційних завдань з математики. Частина 1. Алгебра і початки аналізу. — Тернопіль: Підручники і посібники, 1998.
20. Кравчук В. Р., Підручна М. В., Тадеєв В. Р., Янченко Г. М. Довідник зі змісту, типів та методів розв'язування екзаменаційних завдань з математики. Частина 2. Геометрія. — Тернопіль: Підручники і посібники, 1998.
21. Литвиненко Г. Н., Федченко Л. Я., Швець В. Р. Збірник завдань для екзамену з математики на атестат про середню освіту. Частина 1. Алгебра і початки аналізу. — ВНТЛ, Львів, 1997.
22. Литвиненко Г. Н., Федченко Л. Я., Швець В. Р. Збірник завдань для екзамену з математики на атестат про середню освіту. Частина 2. Геометрія. — ВНТЛ, Львів, 1997.
23. Титаренко А. Н., Роганин А. И. Задачник по математике для учащихся и абитуриентов: Учебное пособие. — Харьков: Факт, 2001.
24. Математика. Самовчитель майбутнього студента / О. М. Титаренко, О. М. Роганін. — Харків: Торсінг плюс, 2007.
25. Роганін О. М. Довідник з математики для школярів та абітурієнтів. — Х.: Світ дитинства, 2007.
26. Титаренко А. М., Роганин А. Н. Планиметрия для учащихся и абитуриентов: Учебное пособие. — Харьков: Веста: Издательство «Ранок», 2002.
27. Титаренко А. М., Роганин А. Н. Стереометрия для учащихся и абитуриентов: Учебное пособие. — Харьков: Веста: Издательство «Ранок», 2002.

ЗМІСТ

Довідкове видання

Роганін Олександр Миколайович
Каплун Олександр Іванович

МАТЕМАТИКА

Практичний довідник

Редактор *Противень І.*
Коректор *Попко О. Г.*
Комп'ютерне макетування *Горбенко С. П.*

Підписано до друку 13. 10. 08.
Формат 84×108 1/32. Папір газетний. Гарнітура Шкільна.
Друк офсетний. Наклад 10 000 (2-й завод — 5 000) прим.

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до Державного реєстру видавців, виготівників
і розповсюджувачів видавничої продукції
сер. ХК № 146 від 13.07.2005 р.

З питань гуртових поставок звертатися:
61010, Харків, а/с 5556
к. т. 8 (057) 755-41-90, 8 (067) 571-62-63
E-mail: cnk-kharkov@ukr.net

Довідкове видання

Роганін Олександр Миколайович
Каплун Олександр Іванович

МАТЕМАТИКА

Практичний довідник

Редактор *Противень І.*
Коректор *Попко О. Г.*
Комп'ютерне макетування *Горбенко С. П.*

Підписано до друку 13. 10. 08.
Формат 84×108 1/32. Папір газетний. Гарнітура Шкільна.
Друк офсетний. Наклад 10 000 (2-й завод — 5 000) прим.

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до Державного реєстру видавців, виготівників
і розповсюджувачів видавничої продукції
сер. ХК № 146 від 13.07.2005 р.

З питань гуртових поставок звертатися:
61010, Харків, а/с 5556
к. т. 8 (057) 755-41-90, 8 (067) 571-62-63
E-mail: cnk-kharkov@ukr.net

До серії «Практичний довідник» увійшли посібники з усіх шкільних предметів.

За допомогою наших книг Ви зможете не тільки повторити та систематизувати теоретичний матеріал з потрібного Вам курсу, але й завдяки поданим завданням перевірити свій рівень підготовки до тематичних і підсумкових атестацій та зовнішнього оцінювання.

ISBN 978-966-8896-77-4